Plaquette 4 – Théorème des valeurs intermédiaires généralisé et invariants topologiques

Connexité par arcs — Prépa MP / MPI (2e année)

Exercices

Méthode

La connexité par arcs sert surtout à **démontrer qu'une équation a une solution** (TVI sur une fonction auxiliaire bien choisie, souvent une différence $g(x) = f(x) - f(\sigma(x))$ qui change de signe sous une symétrie) et à **distinguer des espaces** : une application continue préserve la connexité par arcs, donc un homéomorphisme préserve le nombre de composantes de l'espace privé d'un point. On utilise aussi qu'une fonction continue à valeurs dans un ensemble « troué » ($\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\{-1, 1\}$) est constante sur un connexe par arcs, et qu'une partie à la fois ouverte et fermée d'un connexe par arcs est vide ou pleine.

Exercice 1 – Parties ouvertes et fermées d'un connexe par arcs

Soit A une partie connexe par arcs d'un espace vectoriel normé et $U \subset A$, à la fois ouverte et fermée relativement à A.

a) On suppose $U \neq \emptyset$ et $U \neq A$; soit $a \in U$, $b \in A \setminus U$ et γ un chemin de a à b dans A. Montrer que $\gamma^{-1}(U)$ est à la fois ouvert et fermé dans $[0, 1]$.

b) Avec $s = \sup \gamma^{-1}(U)$, aboutir à une contradiction.

c) Application : montrer que $\mathbb{Q}$ n'est pas connexe par arcs à l'aide de $U = \mathbb{Q} \cap \left]-\infty, \sqrt{2}\right[$.

Exercice 2 – Points fixes en dimension un

a) Soit $f : [a, b] \to [a, b]$ continue. Montrer que f admet un point fixe.

b) Le résultat subsiste-t-il pour $f :]0, 1[\to]0, 1[$? pour $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$?

c) Soient $f, g : [0, 1] \to [0, 1]$ continues avec $f(0) = 0$, $f(1) = 1$. Montrer qu'il existe x tel que $f(x) = g(x)$.

Exercice 3 – Cordes horizontales

Soit $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ continue avec $f(0) = f(1)$, et $n \geq 1$ un entier.

a) On pose $g(x) = f\left(x + \frac{1}{n}\right) - f(x)$ sur $\left[0, 1 - \frac{1}{n}\right]$. Calculer $\sum_{k=0}^{n-1} g\left(\frac{k}{n}\right)$.

b) En déduire qu'il existe x tel que $f\left(x + \frac{1}{n}\right) = f(x)$.

c) Interpréter : un cycliste parcourt 60 km en boucle ; montrer qu'il existe un tronçon de 20 km dont les deux extrémités sont à la même altitude.

Exercice 4 – Points antipodaux sur un cercle

Soit U le cercle unité de $\mathbb{C}$ et $f : \mathrm{U} \to \mathbb{R}$ continue.

a) Montrer qu'il existe $z \in \mathrm{U}$ tel que $f(z) = f(-z)$.

b) Interpréter en termes de températures sur l'équateur.

c) En déduire qu'il n'existe aucune application continue injective de U dans $\mathbb{R}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 5 – Segments, intervalles et cercle ne sont pas homéomorphes

On considère $[0,1]$, $[0,1[$, $]0,1[$ et le cercle U.

a) Pour chacun, déterminer les points x tels que l'espace privé de x soit encore connexe par arcs.

b) En déduire que ces quatre espaces sont deux à deux non homéomorphes.

Exercice 6 – Des lettres non homéomorphes

On voit les lettres majuscules comme des parties du plan formées de segments : $\mathrm{I} = [0,1] \times \{0\}$, T (un segment horizontal et un segment vertical issu de son milieu), X (deux segments qui se croisent en leur milieu).

a) Montrer que ces trois parties sont connexes par arcs.

b) Pour chacune, quel est le nombre maximal de composantes connexes par arcs obtenues en retirant un seul point ?

c) Conclure que I, T, X sont deux à deux non homéomorphes.

Exercice 7 – Fonctions continues à valeurs rationnelles ou de carré imposé

a) Soit A connexe par arcs et $f : A \to \mathbb{R}$ continue, à valeurs dans $\mathbb{Q}$. Montrer que f est constante.

b) Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues telles que $f(x)^2 = 1$ pour tout x.

c) Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues telles que $f(x)^2 = x^2$ pour tout x.

Exercice 8 – Pas de racine carrée continue sur le cercle

On suppose qu'il existe $g : \mathrm{U} \to \mathbb{C}$ continue telle que $g(z)^2 = z$ pour tout $z \in \mathrm{U}$.

a) Montrer que $h(\theta) = \dfrac{g\left(\mathrm{e}^{i\theta}\right)}{\mathrm{e}^{i\theta/2}}$ est continue sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\{-1, 1\}$.

b) En comparant $h(0)$ et $h(2\pi)$, aboutir à une contradiction.

c) Montrer en revanche qu'une telle racine carrée continue existe sur $\mathrm{U} \setminus \{-1\}$.

Exercice 9 – Argument continu sur le plan fendu

Soit $\Omega = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$ et, pour $z = x + iy \in \Omega$, $\theta(z) = 2 \arctan \dfrac{y}{x + |z|}$.

a) Justifier que θ est bien définie et continue sur Ω, à valeurs dans $]-\pi, \pi[$.

b) Montrer que $\mathrm{e}^{i\theta(z)} = \dfrac{z}{|z|}$ (poser $t = \tan \dfrac{\theta}{2}$).

c) Montrer qu'il n'existe pas d'argument continu sur $\mathbb{C}^*$, c'est-à-dire de φ continue avec $\mathrm{e}^{i\varphi(z)} = \dfrac{z}{|z|}$ (utiliser l'exercice précédent).

Exercice 10 – Image d'une sphère par une forme linéaire

Soit $S = \{(x,y,z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ et $f(x,y,z) = x + 2y + 2z$.

a) Justifier que $f(S)$ est un segment $[m, M]$.

b) Calculer m et M (inégalité de Cauchy-Schwarz).

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

c) En déduire que pour tout $c \in [-3, 3]$, le plan d'équation $x + 2y + 2z = c$ rencontre la sphère.

Exercice 11 – Théorème du passage des douanes

Soit A une partie d'un espace vectoriel normé E, et $\gamma : [0,1] \to E$ un chemin avec $\gamma(0) \in A$ et $\gamma(1) \notin A$.

a) On pose $s = \sup\{t \in [0,1] \mid \gamma(t) \in A\}$. Montrer que $\gamma(s) \in \overline{A}$.

b) Montrer que $\gamma(s)$ n'est pas intérieur à A, et en déduire que γ rencontre la frontière $\partial A = \overline{A} \setminus A$.

c) Application : un chemin reliant l'origine au point $(2, 0)$ rencontre le cercle unité.

Exercice 12 – Ouverts connexes par arcs et lignes brisées

Soit U un ouvert connexe par arcs de $\mathbb{R}^n$, $a \in U$, et V l'ensemble des points de U que l'on peut relier à a par une **ligne brisée** (réunion finie de segments) incluse dans U.

a) Montrer que V est ouvert (utiliser une boule incluse dans U).

b) Montrer que $U \setminus V$ est ouvert.

c) En déduire que $V = U$.

d) Le résultat subsiste-t-il pour une partie connexe par arcs non ouverte ? (penser au cercle)

Exercice 13 – Différentielle nulle sur un ouvert connexe par arcs

Soit U un ouvert connexe par arcs de $\mathbb{R}^n$ et $f : U \to \mathbb{R}$ différentiable, avec $\mathrm{d}f(x) = 0$ pour tout $x \in U$.

a) Si $[a, b] \subset U$, montrer que $f(a) = f(b)$ en étudiant $\varphi(t) = f(a + t(b - a))$.

b) En déduire, avec l'exercice précédent, que f est constante.

c) Montrer que le résultat est faux sur l'ouvert $U = \{(x, y) \mid xy > 0\}$.

Exercice 14 – Théorème de Darboux par la connexité

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable sur un intervalle ouvert I. On pose $T = \{(x, y) \in I^2 \mid x < y\}$ et $\tau(x, y) = \dfrac{f(y) - f(x)}{y - x}$.

a) Montrer que $\tau(T)$ est un intervalle.

b) Montrer que $\tau(T) \subset f'(I) \subset \overline{\tau(T)}$.

c) En déduire que $f'(I)$ est un intervalle (théorème de Darboux), même si f' n'est pas continue.

d) Application : la fonction partie entière est-elle la dérivée d'une fonction sur $\mathbb{R}$?

Exercice 15 – Synthèse : le théorème des deux crêpes

Soient A et B deux parties convexes compactes du plan, d'intérieur non vide, d'aires $\mathcal{A}(A)$ et $\mathcal{A}(B)$. Pour $\theta \in \mathbb{R}$, on note $u_\theta = (\cos\theta, \sin\theta)$ et $H_\theta(c) = \{v \mid \langle v, u_\theta \rangle \leq c\}$.

a) On admet que $c \mapsto \mathcal{A}(A \cap H_\theta(c))$ est continue et croissante, strictement là où elle est dans $]0, \mathcal{A}(A)[$. Montrer qu'il existe un unique $c(\theta)$ tel que la droite $\langle v, u_\theta \rangle = c(\theta)$ coupe A en deux parties de même aire.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

b) Montrer que $c(\theta + \pi) = -c(\theta)$. On admet que $\theta \mapsto c(\theta)$ est continue.

c) On pose $g(\theta) = A(B \cap H_\theta(c(\theta))) - \frac{1}{2}A(B)$. Montrer que $g(\pi) = -g(0)$.

d) Conclure : il existe une droite qui coupe simultanément chacune des deux crêpes en deux moitiés d'aire égale.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).