Plaquette 1 – Critères, matrice de passage et applications aux puissances et aux suites

Diagonalisation — Prépa MP / MPI (2e année)

Corrections détaillées

Boîte à outils

Critères de diagonalisabilité (équivalents, en dimension finie).

1. E possède une **base de vecteurs propres**. 2. $\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} \dim E_\lambda = n$. 3. χ_u est **scindé** et $d_\lambda = m_\lambda$ pour toute valeur propre. 4. π_u est **scindé à racines simples**.

Conditions suffisantes.

- n valeurs propres **distinctes** ⇒ diagonalisable.
- Toute matrice **symétrique réelle** est diagonalisable en base orthonormée (théorème spectral).
- Un **projecteur** ($p^2 = p$) et une **symétrie** ($s^2 = \mathrm{id}$) sont diagonalisables.

Mise en œuvre. Si $A = PDP^{-1}$ avec $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ et P la matrice des vecteurs propres **en colonnes** :

$$A^n = PD^nP^{-1} \qquad D^n = \mathrm{diag}\left(\lambda_1^{\,n}, \dots, \lambda_n^{\,n}\right)$$

Applications.

- **Suites couplées** $X_{k+1} = AX_k$: $X_k = A^kX_0 = PD^kP^{-1}X_0$.
- **Système différentiel** $X' = AX$: en posant $Y = P^{-1}X$, le système devient $Y' = DY$, donc $y_i(t) = c_i \mathrm{e}^{\lambda_i t}$.
- **Racine carrée** : si $A = PDP^{-1}$ avec $\lambda_i \geq 0$, alors $B = P\sqrt{D}P^{-1}$ vérifie $B^2 = A$.
- **Commutant** : u et v **diagonalisables** commutent ⇔ ils sont **co-diagonalisables** (diagonalisables dans une **même** base).

Correction de l’exercice 1 – Diagonalisation explicite

- **Spectre** : $\chi_A = X^2 - 2X - 3 = (X-3)(X+1)$, donc $\mathrm{Sp}(A) = \{3, -1\}$.
- Deux valeurs propres **distinctes** en dimension 2 : A est diagonalisable.
- E_3 : $(A - 3I)X = 0$ donne $-2x + 2y = 0$, soit $y = x$: $E_3 = \mathrm{Vect}(1, 1)$.
- E_{-1} : $2x + 2y = 0$, soit $y = -x$: $E_{-1} = \mathrm{Vect}(1, -1)$.

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

- **Vérification** : $AP = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ et $PD = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ ✓ (contrôler $AP = PD$ est plus rapide que $P^{-1}AP$).
- **Remarque** : A est symétrique et P est orthogonale à normalisation près — les deux vecteurs propres sont **orthogonaux**.

Réponse. $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $D = \mathrm{diag}(3, -1)$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l'exercice 2 – Calcul de puissances

$A^n = PD^nP^{-1}$ avec $D^n = \operatorname{diag}\left(3^n, (-1)^n\right)$.

$$A^n = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3^n & 0\\ 0 & (-1)^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$$

— Le calcul donne

$$A^n = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}3^n + (-1)^n & 3^n - (-1)^n\\ 3^n - (-1)^n & 3^n + (-1)^n\end{pmatrix}$$

— **Vérification pour** $n = 1$: $\frac{1}{2}\begin{pmatrix}3-1 & 3+1\\ 3+1 & 3-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}$ ✓

— **Pour** $n = 2$: $\frac{1}{2}\begin{pmatrix}10 & 8\\ 8 & 10\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5 & 4\\ 4 & 5\end{pmatrix}$, et $A^2 = \begin{pmatrix}1+4 & 2+2\\ 2+2 & 4+1\end{pmatrix}$ ✓

— **Comportement asymptotique** : $A^n \sim \frac{3^n}{2}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ — la **plus grande** valeur propre domine.

Réponse. $A^n = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}3^n + (-1)^n & 3^n - (-1)^n\\ 3^n - (-1)^n & 3^n + (-1)^n\end{pmatrix}$.

Correction de l'exercice 3 – Diagonalisabilité à discuter

— **Spectre** : $\chi_A = (X-1)^2$, donc 1 est l'unique valeur propre, avec $m_1 = 2$.

— **Sous-espace propre** : $A - I = \begin{pmatrix}0 & a\\ 0 & 0\end{pmatrix}$.

— Si $a \neq 0$: le rang vaut 1, donc $d_1 = 1 < 2$ — **non diagonalisable**.

— Si $a = 0$: $A = I$, déjà diagonale.

— **Conclusion** : A est diagonalisable **si et seulement si** $a = 0$.

— **Lecture par le polynôme minimal** : pour $a \neq 0$, $\pi_A = (X-1)^2$, à racine **double** — critère 4 en défaut.

— **Idée à retenir** : une matrice diagonalisable n'ayant qu'**une seule** valeur propre λ est nécessairement λI.

Réponse. Uniquement pour $a = 0$.

Correction de l'exercice 4 – Matrice 3x3

— **Spectre** : la matrice est triangulaire inférieure, donc $\chi_A = (X-2)^2(X-3)$ et $\operatorname{Sp}(A) = \{2, 3\}$.

— E_2 : $(A - 2I)X = 0$ s'écrit $x + y = 0$ (ligne 2) et $-x + y = 0$ (ligne 3), d'où $x = y = 0$ et z libre.

— $E_2 = \operatorname{Vect}((0,0,1))$, de dimension $1 < m_2 = 2$.

— **Conclusion** : A n'est **pas diagonalisable**.

— **Contrôle** : $\dim E_3 = 1$ également, donc la somme vaut $2 < 3$ ✓

— **Pour aller plus loin** : A est **trigonalisable** (le polynôme caractéristique est scindé sur $\mathbb{R}$) ; on la réduirait à un bloc de Jordan $\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & 2\end{pmatrix}$ complété par (3).

Réponse. Non diagonalisable : $\dim E_2 = 1 < 2$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l'exercice 5 – Suites couplées

La matrice du système est $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, diagonalisée plus haut.

— **Changement de variables** : $s_n = u_n + v_n$ et $d_n = u_n - v_n$ (les coordonnées dans la base propre).
— $s_{n+1} = 3u_n + 3v_n = 3s_n$: géométrique de raison 3, $s_0 = 1$, donc $s_n = 3^n$.
— $d_{n+1} = u_n + 2v_n - 2u_n - v_n = -(u_n - v_n) = -d_n$: géométrique de raison -1, $d_0 = 1$, donc $d_n = (-1)^n$.
— **Retour** : $u_n = \dfrac{s_n + d_n}{2} = \dfrac{3^n + (-1)^n}{2}$ et $v_n = \dfrac{3^n - (-1)^n}{2}$.
— **Vérification** : $u_1 = 1$, $v_1 = 2$ par les formules ; et directement $u_1 = 1 + 0 = 1$, $v_1 = 2 + 0 = 2$ ✓ ; $u_2 = 5$, $v_2 = 4$ des deux façons ✓
— **Lecture** : les deux suites croissent en $\dfrac{3^n}{2}$ et deviennent **équivalentes** — le vecteur d'état s'aligne sur le vecteur propre dominant $(1, 1)$.

Réponse. $u_n = \dfrac{3^n + (-1)^n}{2}$, $v_n = \dfrac{3^n - (-1)^n}{2}$.

Correction de l'exercice 6 – Système différentiel

Même matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, de valeurs propres 3 et -1.

— **Nouvelles fonctions** : $s = x + y$ et $d = x - y$.
— $s' = 3s$, donc $s(t) = s(0)\mathrm{e}^{3t} = \mathrm{e}^{3t}$.
— $d' = -d$, donc $d(t) = \mathrm{e}^{-t}$.
— **Solutions** :

$$x(t) = \frac{\mathrm{e}^{3t} + \mathrm{e}^{-t}}{2}, \qquad y(t) = \frac{\mathrm{e}^{3t} - \mathrm{e}^{-t}}{2}$$

— **Vérifications** : $x(0) = 1$, $y(0) = 0$ ✓ ; $x'(0) = \dfrac{3 - 1}{2} = 1 = x(0) + 2y(0)$ ✓
— **Structure générale** : dans la base propre, le système se **découple** en équations scalaires $y_i' = \lambda_i y_i$ — c'est tout l'intérêt de la diagonalisation en dynamique.

Réponse. $x = \dfrac{\mathrm{e}^{3t} + \mathrm{e}^{-t}}{2}$, $y = \dfrac{\mathrm{e}^{3t} - \mathrm{e}^{-t}}{2}$.

Correction de l'exercice 7 – Racine carrée d'une matrice

On reconnaît A^2 avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$; mais construisons B par diagonalisation.

— $M = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ a pour valeurs propres 9 et 1 (trace 10, déterminant 9), de vecteurs propres $(1, 1)$ et $(1, -1)$.
— On pose $\sqrt{D} = \mathrm{diag}(3, 1)$ et $B = P\sqrt{D}P^{-1}$:

$$B = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

— **Vérification** : $B^2 = \begin{pmatrix} 4+1 & 2+2 \\ 2+2 & 1+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ ✓

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

— **Non-unicité** : en choisissant $\mathrm{diag}(-3,1)$, $\mathrm{diag}(3,-1)$ ou $\mathrm{diag}(-3,-1)$, on obtient trois autres racines carrées — dont $\begin{pmatrix}1&2\\2&1\end{pmatrix}$.

— **Condition** : cette construction exige des valeurs propres **positives** pour rester réelle.

Réponse. $B = \begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix}$ (parmi d'autres).

Correction de l'exercice 8 – Endomorphisme diagonalisable

Matrice dans la base $(1, X)$:

— $u(1) = 1 + X$; $u(X) = 0 + 1 \times X = X$.

$$M = \begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}$$

— **Spectre** : $\chi = (X-1)^2$, valeur propre unique 1 de multiplicité 2.

— **Sous-espace propre** : $(M - I)X = 0$ donne $x = 0$ (première coordonnée du produit), soit $E_1 = \mathrm{Vect}(X)$, de dimension 1.

— **Conclusion** : $d_1 = 1 < 2$, donc u n'est **pas diagonalisable**.

— **Vérification directe** : $u(P) = P$ signifie $P(0) = a$ et $P(1) = b$ pour $P = a + bX$, c'est-à-dire $a = a$ (toujours vrai) et $a + b = b$, donc $a = 0$: P est multiple de X ✓

— **Nature de** u : $u - \mathrm{id}$ est de rang 1 et de carré nul — u est **unipotent**.

Réponse. Non diagonalisable : $E_1 = \mathrm{Vect}(X)$, de dimension 1.

Correction de l'exercice 9 – Co-diagonalisation

— **Produit** : $AB = \begin{pmatrix}2&0\\0&15\end{pmatrix} = BA$ — deux matrices **diagonales** commutent toujours.

— **Théorème** : deux endomorphismes **diagonalisables** commutent si et seulement s'ils sont **diagonalisables dans une même base**.

— Ici la base commune est la base canonique.

— **Sens de la démonstration** : si u et v commutent, chaque sous-espace propre $E_\lambda(u)$ est **stable** par v ; on diagonalise alors v **à l'intérieur** de chaque $E_\lambda(u)$, obtenant une base de vecteurs propres communs.

— **Contre-exemple sans commutation** : $\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$ sont toutes deux diagonalisables mais ne commutent pas : aucune base ne les diagonalise simultanément.

Réponse. $AB = BA$: elles sont co-diagonalisables (base canonique).

Correction de l'exercice 10 – Diagonalisation d'une matrice symétrique

— **Spectre** : $\chi_A = X^2 - 6X + 8 = (X-2)(X-4)$, donc $\mathrm{Sp}(A) = \{2, 4\}$.

— E_4 : $-x + y = 0$, soit $E_4 = \mathrm{Vect}(1,1)$. E_2 : $x + y = 0$, soit $E_2 = \mathrm{Vect}(1,-1)$.

— **Orthogonalité** : $\langle (1,1), (1,-1) \rangle = 0$ ✓ — automatique pour une matrice symétrique réelle (théorème spectral).

— **Normalisation** :

$$Q = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1&1\\1&-1\end{pmatrix}, \qquad Q^{\mathsf{T}}AQ = \begin{pmatrix}4&0\\0&2\end{pmatrix}$$

— Q est **orthogonale** : $Q^{\mathsf{T}}Q = I$, donc $Q^{-1} = Q^{\mathsf{T}}$ — l'inversion est gratuite.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

— **Application** : la forme quadratique $q(x,y) = 3x^2 + 2xy + 3y^2$ s'écrit $4X^2 + 2Y^2$ dans les nouvelles coordonnées ; elle est **définie positive**.

Réponse. $Q = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $Q^{\mathsf{T}}AQ = \operatorname{diag}(4,2)$.

Correction de l'exercice 11 – Limite de puissances

— **Spectre** : $\operatorname{tr}(A) = 1{,}5$ et $\det A = 0{,}56 - 0{,}06 = 0{,}5$, donc $\chi_A = X^2 - 1{,}5X + 0{,}5 = (X-1)(X-0{,}5)$.

— **Vecteurs propres** : pour $\lambda = 1$, $-0{,}2x + 0{,}3y = 0$ donne $(3,2)$; pour $\lambda = 0{,}5$, $0{,}3x + 0{,}3y = 0$ donne $(1,-1)$.

— **Puissances** : $A^n = PD^nP^{-1}$ avec $D^n = \operatorname{diag}\left(1,\, 0{,}5^n\right)$.

— Comme $0{,}5^n \to 0$, on obtient $D^n \to \operatorname{diag}(1,0)$, donc

$$A^n \longrightarrow P\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}P^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}6 & 0{,}6 \\ 0{,}4 & 0{,}4 \end{pmatrix}$$

— **Interprétation** : quelle que soit la répartition initiale, le système converge vers l'état stationnaire $(0{,}6\,;0{,}4)$ — les **colonnes** de la limite sont toutes égales à ce vecteur propre normalisé.

— **Contrôle** : $A\begin{pmatrix} 0{,}6 \\ 0{,}4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}48 + 0{,}12 \\ 0{,}12 + 0{,}28 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}6 \\ 0{,}4 \end{pmatrix}$ ✓

Réponse. $A^n \to \begin{pmatrix} 0{,}6 & 0{,}6 \\ 0{,}4 & 0{,}4 \end{pmatrix}$.

Correction de l'exercice 12 – Puissances par diagonalisation explicite

a) $\chi_A = X^2 - 5X + 6 = (X-2)(X-3)$. Pour 2 : $A - 2I = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, vecteur $(1,1)$. Pour 3 : $A - 3I = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$, vecteur $(2,1)$.

b) $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ ($\det P = -1$), $D = \operatorname{diag}(2,3)$, $P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

c) $A^n = PD^nP^{-1}$:

$$A^n = \begin{pmatrix} 2\cdot 3^n - 2^n & 2^{n+1} - 2\cdot 3^n \\ 3^n - 2^n & 2^{n+1} - 3^n \end{pmatrix}$$

— Pour $n = 1$: $\begin{pmatrix} 6-2 & 4-6 \\ 3-2 & 4-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ ✓.

Réponse. $A^n = \begin{pmatrix} 2\cdot 3^n - 2^n & 2^{n+1} - 2\cdot 3^n \\ 3^n - 2^n & 2^{n+1} - 3^n \end{pmatrix}$.

Correction de l'exercice 13 – Rotation diagonalisée sur C

a) Valeurs propres $\mathrm{e}^{\pm i\theta}$ (distinctes), vecteurs propres $(1,-i)$ et $(1,i)$. Avec $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix}$, $R_\theta = P\operatorname{diag}(\mathrm{e}^{i\theta}, \mathrm{e}^{-i\theta})P^{-1}$.

b) $R_\theta^n = P\operatorname{diag}(\mathrm{e}^{in\theta}, \mathrm{e}^{-in\theta})P^{-1}$, qui est la même expression avec $n\theta$:

$$R_\theta^n = R_{n\theta}$$

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

c) $R_\theta^n = I \Leftrightarrow \mathrm{e}^{in\theta} = 1 \Leftrightarrow n\theta \in 2\pi\mathbb{Z}$. Il existe un tel n si et seulement si $\frac{\theta}{2\pi} \in \mathbb{Q}$.

Réponse. $R_\theta = P\mathrm{diag}(\mathrm{e}^{i\theta}, \mathrm{e}^{-i\theta})P^{-1}$; $R_\theta^n = R_{n\theta}$; ordre fini $\Leftrightarrow \frac{\theta}{2\pi} \in \mathbb{Q}$.

Correction de l'exercice 14 – Une matrice symétrique 3x3

a) J a pour valeurs propres 3 (simple) et 0 (double), donc A a 4 (simple) et 1 (double).

b) $E_4 = \mathbb{R}(1,1,1)$ et $E_1 = \{x+y+z=0\}$. Base orthonormée : $\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$, $\frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0)$, $\frac{1}{\sqrt{6}}(1,1,-2)$.

c) $Q = \frac{1}{3}J$ est le projecteur orthogonal sur E_4 et $A = 4Q + (I-Q)$, d'où $A^n = 4^nQ + (I-Q)$:

$$A^n = I + \frac{4^n - 1}{3}J$$

— Pour $n=1$: $I+J$ ✓ ; pour $n=2$: $I+5J$, et directement $A^2 = I + 2J + J^2 = I + 5J$ ✓.

Réponse. $\mathrm{Sp}A = \{4,1,1\}$; $A^n = I + \frac{4^n-1}{3}J$.

Correction de l'exercice 15 – Synthèse : diagonalisation d'une matrice 3x3

a) - **Rang 1** : toutes les lignes sont égales, donc $\dim\ker A = 2$ et 0 est valeur propre avec $d_0 = 2$.

— $A(1,1,1) = (3,3,3)$, donc 3 est valeur propre, de vecteur propre $(1,1,1)$.

— **Polynôme caractéristique** : $\chi_A = X^2(X-3)$, et $d_0 = 2 = m_0$, $d_3 = 1 = m_3$.

— A est donc **diagonalisable** :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad D = \mathrm{diag}(3,0,0)$$

— **Contrôle** : $\mathrm{tr}(A) = 3 = 3+0+0$ ✓ et $\det A = 0$ ✓

b) **Méthode directe** (plus rapide ici) : $A^2 = 3A$ car chaque coefficient de A^2 vaut $1+1+1=3$.

— Par récurrence immédiate : $A^n = 3^{n-1}A$ pour $n \geq 1$.

— **Vérification** : $n=2$ donne $3A$ ✓ ; $n=3$ donne $9A$, et $A^3 = A \cdot 3A = 3A^2 = 9A$ ✓

— **Cohérence avec la diagonalisation** : $A^n = PD^nP^{-1}$ et $D^n = \mathrm{diag}(3^n,0,0) = 3^{n-1}D$, donc $A^n = 3^{n-1}A$ ✓

— **Remarque** : $\frac{A}{3}$ est le **projecteur orthogonal** sur la droite $\mathrm{Vect}(1,1,1)$.

Réponse. a) $D = \mathrm{diag}(3,0,0)$ · b) $A^n = 3^{n-1}A$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).