Plaquette 3 – Diagonalisation et équations matricielles

Diagonalisation — Prépa MP / MPI (2e année)

Corrections détaillées

Boîte à outils

Équations polynomiales.

— $Q(A)=0$ avec Q scindé à racines simples $\Rightarrow A$ diagonalisable et $\mathrm{Sp}A \subset Q^{-1}(0)$.
— A diagonalisable de spectre $\{\lambda_i\}$: $A \sim \mathrm{diag}(\lambda_1 I_{n_1}, \dots, \lambda_r I_{n_r})$, et

$$\mathrm{tr}A = \sum n_i\lambda_i, \qquad \det A = \prod \lambda_i^{n_i}, \qquad \mathrm{rg}A = \sum_{\lambda_i \neq 0} n_i$$

— A réelle : les multiplicités de λ et $\overline{\lambda}$ sont égales.
— X solution de $X^2=A$ ou $X^3=A \Rightarrow XA=AX \Rightarrow X$ laisse stables les sous-espaces propres de A.
— A diagonalisable $\Rightarrow \ker A = \ker A^2$.

Correction de l'exercice 1 – Les matrices vérifiant A³ = A

a) $X^3-X=X(X-1)(X+1)$ est scindé à racines simples sur $\mathbb{R}$: A est diagonalisable, $\mathrm{Sp}A \subset \{-1,0,1\}$.

b) $A \sim \mathrm{diag}(I_p, -I_q, 0_r)$, donc $A^2 \sim \mathrm{diag}(I_p, I_q, 0_r)$ et

$$\mathrm{tr}(A^2) = p+q = \mathrm{rg}A$$

c) La classe est déterminée par (p,q,r) avec $p+q+r=n$: il y a $\binom{n+2}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$ classes. Pour $n=2$: 6 classes (I, $-I$, 0, $\mathrm{diag}(1,-1)$, $\mathrm{diag}(1,0)$, $\mathrm{diag}(-1,0)$).

Réponse. Diagonalisable, $\mathrm{Sp}A \subset \{-1,0,1\}$; $\mathrm{rg}A = \mathrm{tr}A^2$; $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$ classes.

Correction de l'exercice 2 – L'équation A² + A + I = 0 sur R

a) $X^2+X+1=(X-j)(X-\bar{j})$ n'a pas de racine réelle et a deux racines complexes simples : A est diagonalisable sur $\mathbb{C}$, de spectre inclus dans $\{j,\bar{j}\}$.

b) χ_A est réel : j et $\bar{j}$ ont la même multiplicité m, et $n=2m$. Alors

$$\det A = (j\bar{j})^m = 1, \qquad \mathrm{tr}A = m(j+\bar{j}) = -m = -\frac{n}{2}$$

c) La matrice compagnon de X^2+X+1 : $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Vérification : $A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ et $A^2+A+I=0$ ✓.

Réponse. n pair, $\det A = 1$, $\mathrm{tr}A = -\frac{n}{2}$; exemple $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Correction de l'exercice 3 – Les structures complexes : A² = -I

a) $(\det A)^2 = \det(-I_n) = (-1)^n$ et $(\det A)^2 \geq 0$, donc n est pair et $(\det A)^2 = 1$. Sur $\mathbb{C}$, A est diagonalisable de valeurs propres $\pm i$ de même multiplicité m : $\det A = (i\cdot(-i))^m = 1$.

b) Si $Ax=\lambda x$ avec λ réel, alors $-x = A^2x = \lambda^2 x$, impossible. Donc (x, Ax) est libre. Et

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$A(Ax) = -x$: le plan est stable, et dans la base (x, Ax) la matrice de l'induit est

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = J$$

c) On itère sur un supplémentaire stable : on obtient une base $(x_1, Ax_1, \dots, x_m, Ax_m)$ dans laquelle A est $\mathrm{diag}(J, \dots, J)$. Toutes les solutions de $A^2 = -I_{2m}$ sont donc semblables entre elles.

Réponse. $n = 2m$, $\det A = 1$; $A \sim \mathrm{diag}(J, \dots, J)$.

Correction de l'exercice 4 – Diagonalisable et A³ = A² : un projecteur

a) $X^2(X-1)$ annule A : $\mathrm{Sp}A \subset \{0, 1\}$.

b) A est diagonalisable, donc π_A est à racines simples ; π_A divise $X^2(X-1)$, donc divise $X(X-1)$. Ainsi $A^2 - A = 0$: A est un projecteur.

c) Non : $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ vérifie $A^2 = 0$ donc $A^3 = A^2$, mais

$$A^2 = 0 \neq A$$

Réponse. $\mathrm{Sp}A \subset \{0, 1\}$; $\pi_A \mid X(X-1)$ donne $A^2 = A$; contre-exemple nilpotent sans diagonalisabilité.

Correction de l'exercice 5 – Noyaux et images pour u² = u + 2 id

a) $X^2 - X - 2 = (X-2)(X+1)$, facteurs premiers entre eux : lemme des noyaux.

b) $(u + \mathrm{id})(u - 2\,\mathrm{id}) = 0$ donne $\mathrm{Im}(u - 2\,\mathrm{id}) \subset \ker(u + \mathrm{id})$. Par le théorème du rang et a) :

$$\dim \mathrm{Im}(u - 2\,\mathrm{id}) = n - \dim \ker(u - 2\,\mathrm{id}) = \dim \ker(u + \mathrm{id})$$

— d'où l'égalité. Même raisonnement pour l'autre.

c) Lagrange : $p_2 = \frac{u + \mathrm{id}}{3}$ (projecteur sur $\ker(u - 2\,\mathrm{id})$) et $p_{-1} = \frac{2\,\mathrm{id} - u}{3}$. Comme $u(u - \mathrm{id}) = 2\,\mathrm{id}$, u est inversible et $u^{-1} = \frac{u - \mathrm{id}}{2}$.

Réponse. $\mathrm{Im}(u - 2\,\mathrm{id}) = \ker(u + \mathrm{id})$; $p_2 = \frac{u + \mathrm{id}}{3}$; $u^{-1} = \frac{u - \mathrm{id}}{2}$.

Correction de l'exercice 6 – La matrice par blocs [[0, A], [I, 0]]

a) $M^2 = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}$.

b) M diagonalisable $\Rightarrow M^2$ diagonalisable $\Rightarrow$ le bloc A l'est. De plus $M(u, v) = (Av, u)$: $\ker M = \{0\} \times \ker A$ et $\ker M^2 = \ker A \times \ker A$. Pour M diagonalisable, $\ker M = \ker M^2$, d'où

$$\dim \ker A = 2 \dim \ker A \quad \Longrightarrow \quad \ker A = \{0\}$$

c) M^2 est diagonalisable et inversible : $\pi_{M^2} = \prod (X - \mu_i)$ avec $\mu_i \neq 0$ distincts. Alors $\prod (X^2 - \mu_i)$ annule M et a $2r$ racines simples $\pm\sqrt{\mu_i}$: M est diagonalisable.

Réponse. $M^2 = \mathrm{diag}(A, A)$; M diagonalisable $\Leftrightarrow A$ diagonalisable et inversible.

Correction de l'exercice 7 – Les projecteurs des matrices 2 × 2

a) $X(X-1)$ annule X : diagonalisable, spectre dans $\{0, 1\}$; les trois formes réduites correspondent aux rangs 0, 2 et 1.

b) Si $X \sim \mathrm{diag}(1, 0)$, alors $\mathrm{tr}X = 1$ et $\det X = 0$. Réciproquement, $\chi_X = X^2 - X$, et

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Cayley-Hamilton donne $X^2 - X = 0$.

c) Trace 1 imposée par la forme ; $\det = a(1-a) - bc = 0$:

$$bc = a(1-a)$$

— Exemple : $a = 2$, $b = 1$, $c = -2$ donne $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$, projecteur (non orthogonal) de rang 1.

Réponse. Classes 0, I_2, $\mathrm{diag}(1,0)$; rang 1 $\Leftrightarrow$ trace 1 et déterminant 0 ; exemple $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$.

Correction de l'exercice 8 – Racines carrées d'un bloc de Jordan

a) $XA = X^3 = AX$, donc X commute avec $N = A - I$. Une matrice commutant avec N vérifie $XNe_2 = NXe_2$, ce qui impose $X = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} = aI + bN$.

b) $X^2 = a^2 I + 2abN$ (car $N^2 = 0$). On identifie : $a^2 = 1$ et $2ab = 1$, d'où

$$X = \pm\left(I + \tfrac{1}{2}N\right) = \pm\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

c) Ni l'une ni l'autre n'est diagonalisable (une seule valeur propre, non scalaires). Pour $X^2 = N$: X serait nilpotente ($X^4 = 0$), donc $X^2 = 0$ en taille 2, contradiction avec $N \neq 0$. Pas de solution.

Réponse. $X = \pm\left(I + \frac{1}{2}N\right)$, non diagonalisables ; $X^2 = N$ sans solution.

Correction de l'exercice 9 – Racines carrées d'une matrice symétrique

a) Valeurs propres 9 et 1, vecteurs $(1,1)$ et $(1,-1)$. $Q_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $Q_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

b) X commute avec A, donc laisse stables les droites propres E_9 et E_1 : X est diagonale dans la même base, $X = \alpha Q_1 + \beta Q_2$, et $X^2 = \alpha^2 Q_1 + \beta^2 Q_2 = A$ donne $\alpha = \pm 3$, $\beta = \pm 1$.

c) $(\alpha, \beta) = (3,1)$: $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$; $(3,-1)$: $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$; et leurs opposées. Vérification :

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$$

Réponse. $\pm\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $\pm\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Correction de l'exercice 10 – Les racines cubiques de l'identité en taille 2

a) $X^3 - 1 = (X-1)(X^2 + X + 1)$, et $X^2 + X + 1$ est irréductible sur $\mathbb{R}$. Les diviseurs unitaires de degré ≤ 2 sont 1, $X - 1$, $X^2 + X + 1$; $\pi_X \neq 1$.

b) Si $\pi_X = X - 1$: $X = I_2$. Sinon $\pi_X = \chi_X = X^2 + X + 1$, c'est-à-dire

$$\mathrm{tr} X = -1, \qquad \det X = 1$$

— Réciproquement, de telles matrices vérifient $X^2 + X + I = 0$ (Cayley-Hamilton), donc $X^3 = I$.

c) Une matrice non scalaire de taille 2 est semblable à la compagnon de son χ : toutes

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

sont semblables à $\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$ (rotation d'angle $\frac{2\pi}{3}$ dans une base convenable).

Réponse. $X = I_2$, ou $\mathrm{tr}X = -1$ et $\det X = 1$ (toutes semblables à $\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$).

Correction de l'exercice 11 – uv diagonalisable mais pas vu

a) $UV = \begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$, nilpotente non nulle : non diagonalisable. $VU = \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$: diagonalisable.

b) C'est le résultat $\chi_{AB} = \chi_{BA}$ (ici les deux valent X^2). Le polynôme caractéristique ne suffit pas à décider de la diagonalisabilité.

c) Si U est inversible, $VU = U^{-1}(UV)U$:

$$VU \sim UV$$

— deux matrices semblables sont simultanément diagonalisables ou non.

Réponse. UV non diagonalisable, $VU = 0$ diagonalisable ; même χ ; semblables si U est inversible.

Correction de l'exercice 12 – Une matrice triangulaire par blocs [[A, B], [0, A]]

a) Par récurrence, $M^k = \begin{pmatrix}A^k & kA^{k-1}B\\ 0 & A^k\end{pmatrix}$ (car $AB = BA$), puis par linéarité.

b) π_M est à racines simples, et toute valeur propre λ de A est valeur propre de M ($\chi_M = \chi_A^2$), donc racine simple de Q : $Q'(\lambda) \neq 0$. Comme A est diagonalisable, $Q'(A)$ l'est, de valeurs propres $Q'(\lambda) \neq 0$:

$$Q'(A) \in GL_n(\mathbb{C})$$

c) $Q(M) = 0$ donne $Q'(A)B = 0$, donc $B = 0$. Réciproquement, si $B = 0$, $M = \mathrm{diag}(A, A)$ est diagonalisable.

Réponse. $Q(M) = \begin{pmatrix}Q(A) & Q'(A)B\\ 0 & Q(A)\end{pmatrix}$; M diagonalisable $\Leftrightarrow B = 0$.

Correction de l'exercice 13 – L'endomorphisme v ↦ p ∘ v ∘ p

a) $\Phi^2(v) = p(pvp)p = pvp$ car $p^2 = p$: $\Phi^2 = \Phi$, projecteur, annulé par $X(X-1)$.

b) Dans une base adaptée, $p = \begin{pmatrix}I_r & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ et pour $v = \begin{pmatrix}V_1 & V_2\\ V_3 & V_4\end{pmatrix}$:

$$pvp = \begin{pmatrix}V_1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

— L'image de Φ est l'ensemble des matrices de cette forme, de dimension r^2.

c) Pour un projecteur, trace et rang coïncident : $\mathrm{tr}\Phi = r^2 = (\mathrm{tr}p)^2$.

Réponse. Φ projecteur ; $\mathrm{rg}\Phi = \mathrm{tr}\Phi = r^2$.

Correction de l'exercice 14 – Valeurs propres de M ↦ AMB

a) $AE_{ij} = \lambda_i E_{ij}$ et $E_{ij}B = \mu_j E_{ij}$, d'où $\Theta(E_{ij}) = \lambda_i \mu_j E_{ij}$.

b) Base propre (E_{ij}) : Θ est diagonalisable de valeurs propres les $\lambda_i \mu_j$. Ainsi

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$$\mathrm{tr}\Theta = \sum_{i,j} \lambda_i \mu_j = \mathrm{tr}A\,\mathrm{tr}B, \qquad \det\Theta = \prod_{i,j} \lambda_i \mu_j = (\det A)^n (\det B)^n$$

c) Si $A = PD_1P^{-1}$ et $B = QD_2Q^{-1}$, les $PE_{ij}Q^{-1}$ forment une base propre : $\Theta(PE_{ij}Q^{-1}) = PD_1E_{ij}D_2Q^{-1} = \lambda_i\mu_j PE_{ij}Q^{-1}$.

Réponse. $\Theta(E_{ij}) = \lambda_i\mu_j E_{ij}$; $\mathrm{tr}\Theta = \mathrm{tr}A\,\mathrm{tr}B$, $\det\Theta = (\det A \det B)^n$.

Correction de l'exercice 15 – Synthèse : l'équation A³ + A² + A = 0 sur R

a) $X^3 + X^2 + X = X(X - j)(X - \bar{j})$, scindé à racines simples sur $\mathbb{C}$: A est diagonalisable sur $\mathbb{C}$, $\mathrm{Sp}A \subset \{0, j, \bar{j}\}$.

b) j et $\bar{j}$ ont la même multiplicité m (χ_A réel), et $\mathrm{rg}A = 2m$. Puis

$$\mathrm{tr}A = m(j + \bar{j}) = -m = -\frac{\mathrm{rg}A}{2}$$

c) Lemme des noyaux sur $\mathbb{R}$ avec X et $X^2 + X + 1$ premiers entre eux : $\mathbb{R}^n = \ker A \oplus \ker(A^2 + A + I)$. Or $A(A^2 + A + I) = 0$ donne $\mathrm{Im}(A^2 + A + I) \subset \ker A$ et $\mathrm{Im}A \subset \ker(A^2 + A + I)$; les dimensions (rang) donnent l'égalité $\mathrm{Im}A = \ker(A^2 + A + I)$, sur lequel l'induit B vérifie $B^2 + B + I = 0$.

d) $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$: rang 2, trace $-1 = -\frac{2}{2}$ ✓.

Réponse. $\mathrm{Sp}A \subset \{0, j, \bar{j}\}$; $\mathrm{rg}A = 2m$ pair, $\mathrm{tr}A = -m$; $\mathbb{R}^n = \ker A \oplus \mathrm{Im}A$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).