# Plaquette 2 – Diagonalisation pratique : matrices 3 × 3 et 4 × 4

## Diagonalisation — Prépa MP / MPI (2e année)

Corrections détaillées

**Boîte à outils**

**Protocole.**

— $\dim E_\lambda = n - \mathrm{rg}(A - \lambda I)$ et $1 \leq \dim E_\lambda \leq m_\lambda$.

— Pour une valeur propre **simple**, $\dim E_\lambda = 1$ automatiquement : seule une valeur propre multiple peut faire échouer la diagonalisation.

— Contrôles : $\mathrm{tr} A = \sum \lambda_i$, $\det A = \prod \lambda_i$.

— Si $A = PDP^{-1}$ :

$$A^n = PD^nP^{-1}, \qquad A^{-1} = PD^{-1}P^{-1}, \qquad A^n = \sum_i \lambda_i^n C_i L_i$$

— où $C_i$ est la $i$-ième colonne de $P$ et $L_i$ la $i$-ième ligne de $P^{-1}$ (décomposition spectrale).

— **Compagnon** : la matrice de dernière ligne $(-a_0, -a_1, -a_2)$ a pour vecteurs propres les $(1, \lambda, \lambda^2)$.

## Correction de l'exercice 1 – Trois valeurs propres distinctes

a) $A(1,1,0) = (3-2,\ 1,\ 1-1) = (1,1,0)$ : valeur propre 1. $A(0,1,1) = (0,2,2)$ : valeur propre 2. $A(1,1,1) = (3,3,3)$ : valeur propre 3.

b) Trois valeurs propres distinctes en dimension 3 : $\chi_A = (X-1)(X-2)(X-3)$ et $A$ est diagonalisable avec

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad D = \mathrm{diag}(1,2,3)$$

c) $\mathrm{tr} A = 3 + 0 + 3 = 6 = 1 + 2 + 3$ ✓.
$\det A = 3(0+2) + 2(3-2) + 2(-1-0) = 6 + 2 - 2 = 6 = 1 \times 2 \times 3$ ✓.

**Réponse.** $\mathrm{Sp} A = \{1,2,3\}$ ; $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $D = \mathrm{diag}(1,2,3)$.

## Correction de l'exercice 2 – Une valeur propre double diagonalisable

a) $\chi_A = (X-2)\begin{vmatrix} X-2 & 3 \\ 0 & X+1 \end{vmatrix} = (X-2)^2(X+1)$.

b) $A - 2I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -3 \\ 3 & 0 & -3 \end{pmatrix}$, de rang 1 : $E_2 = \{x = z\} = \mathrm{Vect}((1,0,1),(0,1,0))$, de dimension 2.

$A + I = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & -3 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ : $x = 0$, $y = z$, donc $E_{-1} = \mathrm{Vect}(0,1,1)$.

c) $\dim E_2 + \dim E_{-1} = 3$ : diagonalisable.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad D = \operatorname{diag}(2, 2, -1)$$

— Contrôle : $\operatorname{tr} A = 3 = 2 + 2 - 1$ ✓.

**Réponse.** $\chi_A = (X-2)^2(X+1)$ ; $\dim E_2 = 2$ : diagonalisable, $D = \operatorname{diag}(2, 2, -1)$.

## Correction de l'exercice 3 – Une valeur propre double non diagonalisable

a) $\operatorname{tr} A = 5$, $\det A = 3(0+1) - 1(0+2) - 1(1-4) = 3 - 2 + 3 = 4$, et la somme des mineurs principaux d'ordre 2 vaut $(6-1) + (0+2) + (0+1) = 8$. Donc $\chi_A = X^3 - 5X^2 + 8X - 4$. Comme 1 est racine, on factorise :

$$\chi_A = (X-1)(X^2 - 4X + 4) = (X-1)(X-2)^2$$

b) $A - 2I = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ : la troisième ligne est la somme des deux premières, et celles-ci sont libres. Rang 2.

c) $\dim E_2 = 3 - 2 = 1 < 2 = m_2$ : $A$ n'est **pas** diagonalisable. Elle est trigonalisable car $\chi_A$ est scindé sur $\mathbb{R}$.

**Réponse.** $\chi_A = (X-1)(X-2)^2$ ; $\dim E_2 = 1$ : non diagonalisable, mais trigonalisable.

## Correction de l'exercice 4 – Discussion selon deux paramètres

a) Triangulaire : 1 (double) et 2 (simple).

b) $A - I = \begin{pmatrix} 0 & a & 1 \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Les deux premières lignes $(a, 1)$ et $(1, b)$ (sur les colonnes 2 et 3) sont proportionnelles si et seulement si $ab - 1 = 0$. Donc

$$\dim E_1 = 2 \Leftrightarrow \operatorname{rg}(A - I) = 1 \Leftrightarrow ab = 1$$

c) $a = 2$, $b = \frac{1}{2}$ : $E_1$ est défini par l'équation $2y + z = 0$, d'où $E_1 = \operatorname{Vect}((1,0,0), (0,1,-2))$.

$A - 2I = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ : $z = 0$, $x = 2y$, $E_2 = \operatorname{Vect}(2, 1, 0)$. Avec $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$, $D = \operatorname{diag}(1, 1, 2)$.

**Réponse.** Diagonalisable $\Leftrightarrow ab = 1$ ; pour $(2, \frac{1}{2})$ : $E_1 = \operatorname{Vect}((1,0,0), (0,1,-2))$, $E_2 = \operatorname{Vect}(2, 1, 0)$.

## Correction de l'exercice 5 – Matrice diagonale par blocs

a) $\chi_M = \chi_A \chi_B = (X-3)(X+1)(X-2)^2$.

b) $A$ a deux valeurs propres distinctes 3 et $-1$ : diagonalisable. $B$ a pour seule valeur propre 2 et $B \neq 2I$ : non diagonalisable.

c) $E_2(M) = \{0\} \times E_2(B)$ est de dimension $1 < 2$. En général :

$$\pi_M = \operatorname{ppcm}(\pi_A, \pi_B)$$

— est scindé à racines simples si et seulement si $\pi_A$ et $\pi_B$ le sont : une matrice diagonale par blocs est diagonalisable si et seulement si chaque bloc l'est.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

**Réponse.** $\chi_M = (X-3)(X+1)(X-2)^2$ ; $M$ non diagonalisable car le bloc $B$ ne l'est pas.

## Correction de l'exercice 6 – Matrice compagnon et Vandermonde

a) Pour une matrice compagnon de dernière ligne $(-a_0, -a_1, -a_2)$,
$\chi_C = X^3 + a_2X^2 + a_1X + a_0$, d'où

$$\chi_C = X^3 - 6X^2 + 11X - 6 = (X-1)(X-2)(X-3)$$

b) $C(1, \lambda, \lambda^2) = (\lambda, \lambda^2, 6 - 11\lambda + 6\lambda^2)$ et $6 - 11\lambda + 6\lambda^2 = \lambda^3$ puisque $\chi_C(\lambda) = 0$. Donc $C(1, \lambda, \lambda^2) = \lambda(1, \lambda, \lambda^2)$.

c) $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{pmatrix}$, matrice de Vandermonde de déterminant $(2-1)(3-1)(3-2) = 2 \neq 0$.
Et $P^{-1}CP = \mathrm{diag}(1, 2, 3)$.

**Réponse.** $\chi_C = (X-1)(X-2)(X-3)$ ; vecteurs $(1, \lambda, \lambda^2)$ ; $P$ de Vandermonde, $\det P = 2$.

## Correction de l'exercice 7 – Matrice triangulaire à diagonale distincte

a) Triangulaire de coefficients diagonaux $1, 2, 3$ distincts : trois valeurs propres distinctes.

b) $E_1 = \mathrm{Vect}(e_1)$. Pour 2 : $A - 2I = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, donc $z = 0$, $x = 2y$ : $(2, 1, 0)$. Pour 3 :
$A - 3I = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, donc $y = 4z$ et $2x = 8z + 3z$ : $(11, 8, 2)$. Vérification :

$$A\begin{pmatrix} 11 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 + 16 + 6 \\ 16 + 8 \\ 6 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} 11 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix}$$

c) Le vecteur propre associé à $a_{kk}$ peut être choisi dans $\mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_k)$ (car $\mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_k)$ est stable) : $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 11 \\ 0 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ est triangulaire supérieure.

**Réponse.** Vecteurs propres $(1, 0, 0)$, $(2, 1, 0)$, $(11, 8, 2)$ ; $P$ triangulaire.

## Correction de l'exercice 8 – Valeurs propres irrationnelles

a) Développement selon la première ligne :
$\chi_A = X(X^2 - 1) - (X - 0) \cdot 1 = X^3 - 2X = X(X^2 - 2)$.

b) $E_0 = \mathrm{Vect}(1, 0, -1)$, $E_{\sqrt{2}} = \mathrm{Vect}(1, \sqrt{2}, 1)$, $E_{-\sqrt{2}} = \mathrm{Vect}(1, -\sqrt{2}, 1)$ (vérification : $A(1, \sqrt{2}, 1) = (\sqrt{2}, 2, \sqrt{2})$). Trois valeurs propres distinctes : diagonalisable.

c) $A^3 = 2A$ (Cayley-Hamilton), donc $A^{2k+1} = 2^k A$ et, pour $k \geq 1$, $A^{2k} = 2^{k-1}A^2$ avec

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

**Réponse.** $\chi_A = X(X^2 - 2)$ ; $A^{2k+1} = 2^k A$, $A^{2k} = 2^{k-1}A^2$ $(k \geq 1)$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

## Correction de l'exercice 9 – Inverse par diagonalisation

a) $A(1,0,1)=(1,0,1)$, $A(1,1,1)=(2,2,2)$, $A(0,1,1)=(0,3,3)$ : $D=\mathrm{diag}(1,2,3)$.

b) Par pivot (ou en résolvant $PX=Y$) : $P^{-1}=\begin{pmatrix}0&-1&1\\1&1&-1\\-1&0&1\end{pmatrix}$.

c) $A^{-1}=\sum_i \frac{1}{\lambda_i}C_iL_i$ donne

$$A^{-1}=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}3&-3&3\\1&3&-1\\1&-3&5\end{pmatrix}$$

— Vérification de la première colonne :
$A\cdot\frac{1}{6}(3,1,1)=\frac{1}{6}(6+1-1,\,-3+2+1,\,-3+1+2)=(1,0,0)$ ✓. Et $\det A=1\times2\times3=6$.

**Réponse.** $D=\mathrm{diag}(1,2,3)$ ; $A^{-1}=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}3&-3&3\\1&3&-1\\1&-3&5\end{pmatrix}$.

## Correction de l'exercice 10 – Une matrice de rang 2

a) Les lignes 1 et 3 sont égales, les lignes 1 et 2 libres : rang 2, $\ker A=\mathrm{Vect}(1,0,-1)$.

b) $Ae_2=e_2$ : valeur propre 1. $A(1,0,1)=(2,0,2)$ : valeur propre 2. Contrôle :

$$\mathrm{tr}A=3=0+1+2$$

c) $A$ est symétrique ; les vecteurs trouvés sont orthogonaux. Base orthonormée $\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,-1)$, $(0,1,0)$, $\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1)$, et $A=ODO^{\mathsf{T}}$ avec $D=\mathrm{diag}(0,1,2)$.

**Réponse.** $\mathrm{Sp}A=\{0,1,2\}$, vecteurs $(1,0,-1)$, $(0,1,0)$, $(1,0,1)$.

## Correction de l'exercice 11 – Reconstruire une matrice à partir de ses éléments propres

a) Les trois vecteurs forment une base ($\det=1\times(1-0)-1\times(0-1)+0=2\neq0$) ; un endomorphisme est déterminé par l'image d'une base : $A=PDP^{-1}$ avec $P=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\1&0&1\end{pmatrix}$, $D=\mathrm{diag}(1,2,2)$.

b) Plus rapide : $A=2I-p$ où $p$ est le projecteur sur $E_1$ parallèlement à $E_2$. On a $E_2=\{x-y+z=0\}$ et $\varphi(v)=x-y+z$ vaut 2 en $(1,0,1)$, donc $p(v)=\frac{x-y+z}{2}(1,0,1)$ et

$$A=2I-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&-1&1\\0&0&0\\1&-1&1\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}3&1&-1\\0&4&0\\-1&1&3\end{pmatrix}$$

c) $A-I=I-p$ et $A-2I=-p$, d'où $(A-I)(A-2I)=-(I-p)p=-(p-p^2)=0$ ✓.

**Réponse.** $A=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}3&1&-1\\0&4&0\\-1&1&3\end{pmatrix}$.

## Correction de l'exercice 12 – Matrice d'un projecteur et d'une symétrie

a) On cherche $p(v)=v-t(1,0,0)\in\Pi$ : $(x-t)+y+z=0$, donc $t=x+y+z$ et $p(v)=(-y-z,y,z)$ :

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$$\mathrm{Mat}(p) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

b) En calculant, $p^2$ a pour première ligne $(0,-1,-1)$, et les autres lignes sont inchangées : $p^2 = p$. $\mathrm{tr}p = 2 = \mathrm{rg}p = \dim \Pi$.

c) $\mathrm{Mat}(s) = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Dans la base $((1,-1,0),(1,0,-1),(1,0,0))$ (base de $\Pi$ puis de $D$) : $p \sim \mathrm{diag}(1,1,0)$ et $s \sim \mathrm{diag}(1,1,-1)$.

**Réponse.** $\mathrm{Mat}(p) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ; $p \sim \mathrm{diag}(1,1,0)$, $s \sim \mathrm{diag}(1,1,-1)$.

## Correction de l'exercice 13 – Une matrice 4 × 4 antidiagonale

a) $K^2 = I$. $E_1 = \mathrm{Vect}(e_1+e_4, e_2+e_3)$, $E_{-1} = \mathrm{Vect}(e_1-e_4, e_2-e_3)$, chacun de dimension 2 : diagonalisable.

b) Dans la même base, $M = \mathrm{diag}(a+b, a+b, a-b, a-b)$, donc

$$\det M = (a+b)^2(a-b)^2 = (a^2-b^2)^2$$

c) $M$ est inversible si et seulement si $a \neq \pm b$.

**Réponse.** $\mathrm{Sp}K = \{1,-1\}$ (doubles) ; $\det M = (a^2-b^2)^2$ ; inversible ssi $a \neq \pm b$.

## Correction de l'exercice 14 – Décomposition spectrale

a) $PDP^{-1} = \sum_i \lambda_i C_i L_i$ (produit par blocs colonne-ligne). $L_i C_j = (P^{-1}P)_{ij} = \delta_{ij}$, donc $\Pi_i \Pi_j = C_i(L_iC_j)L_j = \delta_{ij}\Pi_i$. Et $\sum C_iL_i = PP^{-1} = I$.

b) Par récurrence, $A^k = \sum \lambda_i^k \Pi_i$ (les produits croisés s'annulent), puis par linéarité :

$$Q(A) = \sum_i Q(\lambda_i)\Pi_i$$

c) $P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. $\Pi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}(-1 \;\; 2) = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ et $\Pi_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}(1 \;\; -1) = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Alors $2\Pi_1 + 3\Pi_2 = \begin{pmatrix} -2+6 & 4-6 \\ -2+3 & 4-3 \end{pmatrix} = A$ ✓.

**Réponse.** $A = \sum \lambda_i \Pi_i$, $\Pi_i$ projecteurs spectraux ; $\Pi_1 = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, $\Pi_2 = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

## Correction de l'exercice 15 – Synthèse : puissances et comportement asymptotique

a) $A(1,1,0) = (1,1,0)$, $A(0,1,1) = (0,-1,-1)$, $A(1,1,1) = (2,2,2)$ : $D = \mathrm{diag}(1,-1,2)$.

b) $P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Décomposition spectrale :

$$M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

c) $M_1 + M_2 + 4M_3 = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 3 \\ 3 & -2 & 3 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix}$, et le calcul direct de $A^2$ donne la même matrice ✓. Enfin $\frac{A^n}{2^n} = \frac{M_1}{2^n} + \left(-\frac{1}{2}\right)^n M_2 + M_3 \to M_3$, projecteur de rang 1 sur la direction dominante $(1,1,1)$.

**Réponse.** $D = \mathrm{diag}(1,-1,2)$ ; $A^n = M_1 + (-1)^n M_2 + 2^n M_3$ ; $\frac{A^n}{2^n} \to M_3$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).