Plaquette 5 – Diagonalisation : problèmes de synthèse

Diagonalisation — Prépa MP / MPI (2e année)

Corrections détaillées

Boîte à outils

Réflexes d'oral.

— Chercher un **polynôme annulateur** dans les hypothèses ; s'il est scindé à racines simples, conclure.

— Pour un endomorphisme de M_n ou de $\mathrm{K}_n[X]$: chercher les sous-espaces évidents (S_n, A_n, matrices de trace nulle, polynômes pairs ou impairs).

— $\pi_{L_A} = \pi_A$ pour $L_A : M \mapsto AM$, donc L_A diagonalisable $\Leftrightarrow A$ diagonalisable.

— Une **rotation** de $\mathbb{R}^3$ d'angle θ a pour valeurs propres 1, $\mathrm{e}^{\pm i\theta}$, et

$$\mathrm{tr} R = 1 + 2\cos\theta$$

— Si $AB - BA = \mu B$ avec $\mu \neq 0$, alors $AB^k - B^k A = k\mu B^k$.

Correction de l'exercice 1 – L'endomorphisme M ↦ M + 2Ms

a) $\varphi(S) = 3S$ et $\varphi(A) = A - 2A = -A$.

b) $M_n = S_n \oplus A_n$: base propre, $\mathrm{Sp}\varphi = \{3, -1\}$ (pour $n \geq 2$), et $(X-3)(X+1)$ annule φ.

c) $\dim S_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$ et $\dim A_n = \dfrac{n(n-1)}{2}$, d'où

$$\mathrm{tr}\varphi = \frac{3n(n+1) - n(n-1)}{2} = n^2 + 2n, \qquad \det\varphi = 3^{n(n+1)/2}(-1)^{n(n-1)/2}$$

— Contrôle direct de la trace : $\mathrm{tr}(M \mapsto M) = n^2$ et $\mathrm{tr}(M \mapsto M^{\mathrm{T}}) = n$, d'où $n^2 + 2n$ ✓.

Réponse. $\mathrm{Sp}\varphi = \{3, -1\}$, $E_3 = S_n$, $E_{-1} = A_n$; $\mathrm{tr}\varphi = n^2 + 2n$.

Correction de l'exercice 2 – La matrice des quotients i/j

a) $A = UV^{\mathrm{T}}$ avec $U = (1, 2, \ldots, n)$ et $V = \left(1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{n}\right)$: rang 1.

b) $\mathrm{tr}A = \sum_i \frac{i}{i} = n \neq 0$. Une matrice de rang 1 de trace non nulle est diagonalisable :

$$A \sim \mathrm{diag}(n, 0, \ldots, 0)$$

c) Pour $n = 3$: valeur propre 3 de vecteur $U = (1, 2, 3)$ (car $AU = U(V^{\mathrm{T}}U) = 3U$), et $E_0 = \{x + \frac{y}{2} + \frac{z}{3} = 0\} = \mathrm{Vect}((1, -2, 0), (1, 0, -3))$.

Réponse. Rang 1, trace n : diagonalisable, spectre $\{n, 0\}$; pour $n = 3$, $E_3 = \mathbb{R}(1, 2, 3)$.

Correction de l'exercice 3 – L'opérateur P ↦ P(X + 1) + P(X - 1)

a) $P(X \pm 1) = \sum_k \frac{(\pm 1)^k}{k!} P^{(k)}$; en sommant, les termes d'ordre impair se compensent et ceux d'ordre pair doublent.

b) $u - 2\,\mathrm{id} = N = 2\sum_{k \geq 1} \frac{D^{2k}}{(2k)!}$ est nilpotent (il abaisse le degré d'au moins 2). Donc $\mathrm{Sp}u = \{2\}$.

c) $N \neq 0$ car $N(X^2) = 2$. Un endomorphisme diagonalisable à une seule valeur propre est scalaire ; $u \neq 2\,\mathrm{id}$, donc u n'est **pas** diagonalisable. Et $E_2 = \ker N = \mathbb{R}_1[X]$:

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$$N(aX+b)=0, \qquad N(X^2)=2\neq 0$$

Réponse. $u=2\,\mathrm{id}+N$, N nilpotent non nul ; non diagonalisable, $E_2=\mathbb{R}_1[X]$.

Correction de l'exercice 4 – Diagonalisabilité de M ↦ AM

a) $L_A^k(M)=A^kM$, donc $L_A^k=L_{A^k}$, puis par linéarité $Q(L_A)=L_{Q(A)}$.

b) $Q(L_A)=0 \Leftrightarrow Q(A)M=0$ pour tout $M \Leftrightarrow Q(A)=0$ (prendre $M=I$). Les deux idéaux annulateurs coïncident :

$$\pi_{L_A}=\pi_A$$

c) L_A diagonalisable $\Leftrightarrow \pi_{L_A}=\pi_A$ scindé à racines simples $\Leftrightarrow A$ diagonalisable. Pour $A=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$, $\pi_A=(X-1)^2$: L_A n'est pas diagonalisable.

Réponse. $\pi_{L_A}=\pi_A$; L_A diagonalisable $\Leftrightarrow A$ diagonalisable.

Correction de l'exercice 5 – Si AB - BA = B, alors B est nilpotente

a) Pour $k=1$, c'est l'hypothèse. Si c'est vrai au rang k :

$$AB^{k+1}-B^{k+1}A=(AB^k-B^kA)B+B^k(AB-BA)=kB^{k+1}+B^{k+1}$$

b) a) s'écrit $\Phi(B^k)=kB^k$: si $B^k\neq 0$, c'est un vecteur propre de Φ pour la valeur propre k.

c) Φ est un endomorphisme de $M_n(\mathbb{C})$, de dimension n^2 : il a au plus n^2 valeurs propres. Si B n'était pas nilpotente, tous les entiers $k\geq 1$ seraient valeurs propres. Contradiction : il existe k avec $B^k=0$.

Réponse. $\Phi(B^k)=kB^k$; au plus n^2 valeurs propres, donc $B^k=0$ pour un k.

Correction de l'exercice 6 – L'équation $A^s = A^2$

a) En transposant : $A=(A^{\mathsf{T}})^{\mathsf{T}}=(A^2)^{\mathsf{T}}=(A^{\mathsf{T}})^2=A^4$.

b) $X^4-X=X(X-1)(X^2+X+1)=X(X-1)(X-j)(X-\bar{j})$, scindé à racines simples sur $\mathbb{C}$: A est diagonalisable sur $\mathbb{C}$ et

$$\mathrm{Sp}A\subset\{0,1,j,\bar{j}\}$$

c) Diagonalisable sur $\mathbb{R} \Leftrightarrow$ spectre réel, inclus dans $\{0,1\} \Leftrightarrow \pi_A \mid X(X-1) \Leftrightarrow A^2=A$. (Alors $A^{\mathsf{T}}=A^2=A$: A est un projecteur symétrique, donc orthogonal.)

Réponse. $A^4=A$; $\mathrm{Sp}A\subset\{0,1,j,\bar{j}\}$; diagonalisable sur $\mathbb{R}$ ssi $A^2=A$.

Correction de l'exercice 7 – Une matrice de permutation comme rotation

a) Les colonnes de P sont e_2, e_3, e_1, orthonormées : P est orthogonale. $\det P=1$ (permutation circulaire, signature +1).

b) $P(1,1,1)=(1,1,1)$: l'axe est $\mathbb{R}(1,1,1)$. $\mathrm{tr}P=0=1+2\cos\theta$, donc $\cos\theta=-\frac{1}{2}$, angle $\frac{2\pi}{3}$ (au signe près, selon l'orientation de l'axe).

c) $\chi_P=X^3-1$, valeurs propres $1,j,\bar{j}$, vecteurs propres $(1,1,1)$, $(1,\bar{j},j)$, $(1,j,\bar{j})$. Vérification pour le deuxième : $P(1,\bar{j},j)=(j,1,\bar{j})=j(1,\bar{j},j)$ car $j\bar{j}=1$ et $j^2=\bar{j}$:

$$P=Q\,\mathrm{diag}(1,j,\bar{j})\,Q^{-1}$$

Réponse. Rotation d'axe $\mathbb{R}(1,1,1)$ et d'angle $\frac{2\pi}{3}$; valeurs propres $1,j,\bar{j}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l'exercice 8 – Une matrice bistochastique

a) J a pour valeurs propres 3 et 0 (double), donc P a 1 et $\frac{1}{4}$ (double). $E_1 = \mathbb{R}(1,1,1)$, $E_{1/4} = \{x+y+z=0\}$; base orthonormée $\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$, $\frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0)$, $\frac{1}{\sqrt{6}}(1,1,-2)$.

b) Avec $Q = \frac{1}{3}J$: $P = Q + \frac{1}{4}(I-Q)$, d'où

$$P^n = \frac{1}{3}J + \frac{1}{4^n}\left(I - \frac{1}{3}J\right)$$

c) $P^n \to \frac{1}{3}J$: la loi tend vers l'uniforme à vitesse géométrique $\frac{1}{4^n}$ (la deuxième valeur propre). Pour $n=1$, la formule redonne bien $\frac{1}{3}J + \frac{1}{4}I - \frac{1}{12}J = \frac{1}{4}(I+J)$ ✓.

Réponse. $\mathrm{Sp}P = \{1, \frac{1}{4}\}$; $P^n = \frac{1}{3}J + 4^{-n}\left(I - \frac{1}{3}J\right) \to \frac{1}{3}J$.

Correction de l'exercice 9 – La matrice de Fourier

a) Le coefficient (k,l) de $\overline{F}F$ vaut $\sum_m \omega^{-(k-1)m}\omega^{m(l-1)} = \sum_m \omega^{m(l-k)}$, égal à n si $k=l$ et 0 sinon (somme géométrique de raison $\omega^{l-k} \neq 1$).

b) Le coefficient (k,l) de F^2 vaut $\sum_m \omega^{m(k-1+l-1)}$, égal à n si $(k-1)+(l-1) \equiv 0 \pmod n$, 0 sinon : c'est nS. Et $S^2 = I$, donc $F^4 = n^2 S^2 = n^2 I$.

c) $X^4 - n^2 = (X-\sqrt{n})(X+\sqrt{n})(X-i\sqrt{n})(X+i\sqrt{n})$ est scindé à racines simples et annule F : diagonalisable, spectre inclus dans ces quatre valeurs. Pour $n=2$: $F = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, de trace 0 et de déterminant -2, donc

$$\mathrm{Sp}F = \{\sqrt{2}, -\sqrt{2}\}$$

Réponse. $\overline{F}F = nI$, $F^4 = n^2 I$; $\mathrm{Sp}F \subset \{\pm\sqrt{n}, \pm i\sqrt{n}\}$; $n=2$: $\{\pm\sqrt{2}\}$.

Correction de l'exercice 10 – Le renversement des coefficients

a) $r(X^k) = X^{n-k}$, donc $r^2(X^k) = X^k$: $r^2 = \mathrm{id}$.

b) E_1 : $a_k = a_{n-k}$ pour tout k, base $(X^k + X^{n-k})_{k < n/2}$ complétée par $X^{n/2}$ si n est pair. E_{-1} : $a_k = -a_{n-k}$, base $(X^k - X^{n-k})_{k<n/2}$. Ainsi

$$\dim E_1 = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1, \qquad \dim E_{-1} = \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$$

c) $\mathrm{tr}\, r = \dim E_1 - \dim E_{-1}$: 1 si n est pair, 0 si n est impair (c'est le nombre de k tels que $k = n-k$).

Réponse. $r^2 = \mathrm{id}$; $\dim E_1 = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1$, $\dim E_{-1} = \lceil \frac{n}{2} \rceil$; $\mathrm{tr}\, r \in \{0,1\}$.

Correction de l'exercice 11 – A est un polynôme en A³

a) $x \mapsto x^3$ est injective sur $\mathbb{R}$: les μ_i^3 sont distincts si les μ_i le sont. L'interpolation de Lagrange fournit Q avec $Q(\mu_i^3) = \mu_i$.

b) Dans une base propre, $A = \mathrm{diag}(\mu_i)$ et $Q(B) = \mathrm{diag}(Q(\mu_i^3)) = \mathrm{diag}(\mu_i)$:

$$A = Q(A^3)$$

c) Non : $A = \mathrm{diag}(1,-1)$ donne $A^2 = I$, et tout polynôme en I est scalaire, alors que A ne l'est pas. Le carré n'est pas injectif (1 et -1 ont le même carré).

Réponse. Q de Lagrange avec $Q(\mu^3) = \mu$; $A = Q(A^3)$; faux pour A^2 ($\mathrm{diag}(1,-1)$).

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l'exercice 12 – Déterminant de I + A pour un projecteur

a) $A \sim \mathrm{diag}(I_r, 0)$, donc $I + A \sim \mathrm{diag}(2I_r, I_{n-r})$ et

$$\det(I+A) = 2^r, \qquad \det(I-A) = 0^r \cdot 1 = \begin{cases} 1 & r = 0 \\ 0 & r \geq 1 \end{cases}$$

b) $(I+A)\left(I - \frac{1}{2}A\right) = I + A - \frac{1}{2}A - \frac{1}{2}A^2 = I + \frac{1}{2}A - \frac{1}{2}A = I$.

c) $A^k = A$ pour $k \geq 1$, donc $\exp(A) = I + (\mathrm{e} - 1)A$. Contrôle : $\det\exp(A) = \mathrm{e}^r = \mathrm{e}^{\mathrm{tr}A}$ ✓.

Réponse. $\det(I+A) = 2^r$; $(I+A)^{-1} = I - \frac{1}{2}A$; $\exp(A) = I + (\mathrm{e}-1)A$.

Correction de l'exercice 13 – Si une puissance est diagonalisable

a) $Q(A) = \prod (A^k - \mu_i I) = \pi_{A^k}(A^k) = 0$. Les μ_i sont non nuls car A^k est inversible.

b) Chaque $X^k - \mu_i$ a k racines distinctes (les racines k-ièmes de $\mu_i \neq 0$), et deux facteurs $X^k - \mu_i$, $X^k - \mu_j$ ($i \neq j$) n'ont pas de racine commune (sinon $\mu_i = z^k = \mu_j$). Ainsi Q a kr racines distinctes :

$$Q \text{ est scindé à racines simples}$$

c) A est diagonalisable. L'hypothèse est nécessaire : $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = 0$ est diagonalisable sans que la matrice le soit.

Réponse. $Q = \prod (X^k - \mu_i)$ à racines simples annule A ; nécessité de l'inversibilité (bloc nilpotent).

Correction de l'exercice 14 – Diagonalisation simultanée de trois symétries

a) $S_i^2 = I$ (diagonales à coefficients ± 1) et les matrices diagonales commutent.
$S_3 = \mathrm{diag}(-1, -1, 1)$.

b) G est stable par produit ($S_1S_2 = S_3$, $S_1S_3 = S_2$, $S_2S_3 = S_1$), chaque élément est son propre inverse, et tout élément non neutre est d'ordre 2 : groupe de Klein.

c) Récurrence sur $\dim E$. Si tous les A_i sont scalaires, c'est fini. Sinon, l'un d'eux, A_1, a au moins deux sous-espaces propres, tous de dimension $< n$ et stables par les autres A_j (commutation). Les induits sur chaque $E_\lambda(A_1)$ sont diagonalisables et commutent : par hypothèse de récurrence, ils se codiagonalisent dans une base de $E_\lambda(A_1)$. La réunion de ces bases convient :

$$E = \bigoplus_{\lambda} E_\lambda(A_1)$$

Réponse. Groupe de Klein ; une famille de diagonalisables commutant deux à deux est codiagonalisable.

Correction de l'exercice 15 – Synthèse : une rotation de R³

a) Les colonnes $\frac{1}{3}(2,2,-1)$, $\frac{1}{3}(-1,2,2)$, $\frac{1}{3}(2,-1,2)$ sont unitaires et orthogonales deux à deux (par exemple $\frac{1}{9}(-2+4-2) = 0$). Le déterminant vaut 1 (calcul direct).

b) Chaque ligne de $R - I$ a une somme nulle : $R(1,1,1) = (1,1,1)$, axe $\mathbb{R}(1,1,1)$.
$\mathrm{tr}R = 2 = 1 + 2\cos\theta$, donc

$$\cos\theta = \frac{1}{2}, \qquad \theta = \frac{\pi}{3}$$

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

c) Valeurs propres 1, $\mathrm{e}^{\pm i\pi/3}$: distinctes, donc diagonalisable sur $\mathbb{C}$; non réelles, donc pas diagonalisable sur $\mathbb{R}$.

d) $R^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$: la rotation d'angle $\frac{2\pi}{3}$ autour du même axe (permutation circulaire des coordonnées). Et $R^6 = (R^2)^3 = I$: six rotations de $\frac{\pi}{3}$ font un tour complet.

Réponse. Axe $\mathbb{R}(1,1,1)$, angle $\frac{\pi}{3}$; valeurs propres 1, $\mathrm{e}^{\pm i\pi/3}$; R^2 = permutation circulaire, $R^6 = I$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).