Plaquette 4 – Diagonalisation, topologie et exponentielle de matrices

Diagonalisation — Prépa MP / MPI (2e année)

Corrections détaillées

Boîte à outils

Densité et continuité.

— Toute $A \in M_n(\mathbb{C})$ est limite de matrices à valeurs propres **distinctes** (trigonaliser puis perturber la diagonale).
— Si deux applications continues coïncident sur une partie dense, elles sont égales.
— $\rho(A) = \max|\lambda|$ (rayon spectral) vérifie $\rho(A) \leq \|A\|$ pour toute norme subordonnée.

Fonctions de matrices diagonalisables. Avec les projecteurs spectraux Π_i :

$$f(A) = \sum_i f(\lambda_i)\,\Pi_i, \qquad \exp(A) = P\mathrm{diag}\left(\mathrm{e}^{\lambda_i}\right)P^{-1}$$

— $\det\exp(A) = \mathrm{e}^{\mathrm{tr}A}$; $\exp(tA)$ résout $X' = AX$.
— A^n converge $\Leftrightarrow$ chaque λ_i vérifie $|\lambda_i| < 1$ ou $\lambda_i = 1$ (cas diagonalisable).

Correction de l'exercice 1 – Densité des matrices diagonalisables sur C

a) Par exemple $\varepsilon_i^{(k)} = \frac{i}{k}\delta$ avec $\delta > 0$ choisi plus petit que les écarts non nuls entre les t_i divisé par n : pour k assez grand, deux valeurs $t_i + \frac{i\delta}{k}$ et $t_j + \frac{j\delta}{k}$ $(i \neq j)$ sont distinctes (si $t_i = t_j$, elles diffèrent de $\frac{(i-j)\delta}{k} \neq 0$; sinon l'écart $t_i - t_j$ domine).

b) $T_k = T + \mathrm{diag}(\varepsilon_i^{(k)})$ est triangulaire à diagonale distincte, donc diagonalisable, et $A_k = PT_kP^{-1}$ aussi. Enfin

$$\|A_k - A\| = P\mathrm{diag}(\varepsilon_i^{(k)})P^{-1} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

c) Toute matrice est limite de matrices diagonalisables (et même à valeurs propres distinctes).

Réponse. Perturbation de la diagonale de T : $A_k = P(T + \mathrm{diag}(\varepsilon_i^{(k)}))P^{-1} \to A$.

Correction de l'exercice 2 – Non-densité sur R

a) $\Delta(M)$ est le discriminant de χ_M ; si M est diagonalisable sur $\mathbb{R}$, χ_M est scindé sur $\mathbb{R}$, donc $\Delta(M) \geq 0$.

b) $\Delta(J) = 0 - 4 = -4 < 0$. L'application Δ est continue (polynomiale en les coefficients), donc $\{\Delta < 0\}$ est un ouvert contenant J : il existe $r > 0$ tel que

$$\|M - J\| < r \Longrightarrow \Delta(M) < 0$$

— et aucune de ces matrices n'est diagonalisable sur $\mathbb{R}$.

c) Les matrices diagonalisables sur $\mathbb{R}$ ne sont pas denses dans $M_2(\mathbb{R})$ (ni dans $M_n(\mathbb{R})$, $n \geq 2$, par blocs).

Réponse. $\Delta(J) = -4 < 0$, et $\{\Delta < 0\}$ est un ouvert sans matrice diagonalisable réelle.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l'exercice 3 – Cayley-Hamilton par densité

a) $\chi_A(A) = P\chi_A(D)P^{-1}$ et $\chi_A(D) = \operatorname{diag}(\chi_A(\lambda_i)) = 0$ car les λ_i sont racines de χ_A.

b) Les coefficients de χ_A sont des polynômes en les coefficients de A, ainsi que ceux des puissances A^k : chaque coefficient de $\chi_A(A)$ est polynomial en les a_{ij}, donc continu.

c) L'application continue $A \mapsto \chi_A(A)$ est nulle sur la partie dense des matrices diagonalisables, donc nulle partout :

$$\forall A \in M_n(\mathbb{C}), \quad \chi_A(A) = 0$$

— Une matrice réelle est en particulier complexe, avec le même χ_A : le résultat vaut sur $\mathbb{R}$.

Réponse. Vrai sur les diagonalisables, continuité, densité : $\chi_A(A) = 0$ pour tout A.

Correction de l'exercice 4 – Déterminant de l'exponentielle

a) $(PDP^{-1})^k = PD^kP^{-1}$, puis on somme la série : $\exp(A) = P\exp(D)P^{-1}$ avec $\exp(D) = \operatorname{diag}(\mathrm{e}^{\lambda_i})$. Donc

$$\det\exp(A) = \prod_i \mathrm{e}^{\lambda_i} = \mathrm{e}^{\sum \lambda_i} = \mathrm{e}^{\operatorname{tr}A}$$

b) $A \mapsto \det\exp(A)$ et $A \mapsto \mathrm{e}^{\operatorname{tr}A}$ sont continues et coïncident sur une partie dense : elles sont égales.

c) $\det\exp(A) = \mathrm{e}^{\operatorname{tr}A} \neq 0$; si $\operatorname{tr}A = 0$, $\det\exp(A) = 1$.

Réponse. $\det\exp(A) = \mathrm{e}^{\operatorname{tr}A}$ pour toute A ; $\exp(A)$ toujours inversible.

Correction de l'exercice 5 – Exponentielle d'une matrice symétrique

a) Valeurs propres 3 et -1, vecteurs $(1,1)$ et $(1,-1)$. $\Pi_3 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$, $\Pi_{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$.

b) $\exp(tA) = \mathrm{e}^{3t}\Pi_3 + \mathrm{e}^{-t}\Pi_{-1}$:

$$\exp(tA) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}\mathrm{e}^{3t}+\mathrm{e}^{-t} & \mathrm{e}^{3t}-\mathrm{e}^{-t}\\ \mathrm{e}^{3t}-\mathrm{e}^{-t} & \mathrm{e}^{3t}+\mathrm{e}^{-t}\end{pmatrix}$$

c) $\det\exp(A) = \frac{1}{4}\left[(\mathrm{e}^3+\mathrm{e}^{-1})^2 - (\mathrm{e}^3-\mathrm{e}^{-1})^2\right] = \frac{1}{4}\times 4\mathrm{e}^3\mathrm{e}^{-1} = \mathrm{e}^2 = \mathrm{e}^{\operatorname{tr}A}$ ✓.

Réponse. $\exp(tA) = \mathrm{e}^{3t}\Pi_3 + \mathrm{e}^{-t}\Pi_{-1}$; $\det\exp(A) = \mathrm{e}^2$.

Correction de l'exercice 6 – Convergence de la suite des puissances

a) $A^n = \sum \lambda_i^n \Pi_i$ et les Π_i sont linéairement indépendants (non nuls, $\Pi_i\Pi_j = \delta_{ij}\Pi_i$). Donc (A^n) converge si et seulement si chaque suite (λ_i^n) converge, c'est-à-dire $|\lambda_i| < 1$ ou $\lambda_i = 1$.

b) La limite est Π_1 (projecteur sur $\ker(A - I)$) si 1 est valeur propre, 0 sinon.

c) A : valeurs propres 1 et $\frac{1}{2}$, donc

$$A^n \to \Pi_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$$

— B : valeurs propres 1 et -1 ; $(-1)^n$ diverge, B^n alterne entre I et B et ne converge pas.

Réponse. Convergence ssi $|\lambda_i| < 1$ ou $\lambda_i = 1$; $A^n \to \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$; B^n diverge.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l'exercice 7 – Classe de similitude non fermée

a) $NP_t = \begin{pmatrix} 0 & t \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et P_t^{-1} divise la deuxième ligne par t (elle est nulle), d'où

$$P_t^{-1} N P_t = tN$$

b) $tN \to 0$ quand $t \to 0$: 0 est limite de matrices semblables à N, mais n'est pas semblable à N ($0 \neq N$, et $P0P^{-1} = 0$). La classe de N n'est pas fermée.

c) $P(\lambda I)P^{-1} = \lambda I$: la classe d'une matrice scalaire est un singleton. (Plus généralement, on montre que la classe de similitude de $A \in M_n(\mathbb{C})$ est fermée si et seulement si A est diagonalisable.)

Réponse. $P_t^{-1} N P_t = tN \to 0$: classe de N non fermée ; classe d'une scalaire réduite à un point.

Correction de l'exercice 8 – Une limite de diagonalisables

a) Triangulaire de valeurs propres $\frac{1}{k}$ et 0, distinctes : diagonalisable. $E_{1/k} = \mathrm{Vect}(1, 0)$ et $E_0 = \mathrm{Vect}\left(1, -\frac{1}{k}\right)$ (car $\frac{1}{k}x + y = 0$).

b) $A_k \to N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, nilpotente non nulle, non diagonalisable. L'ensemble des matrices diagonalisables n'est pas fermé.

c) Les deux directions propres $(1, 0)$ et $\left(1, -\frac{1}{k}\right)$ se rapprochent et deviennent colinéaires à la limite : la matrice de passage $P_k = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{k} \end{pmatrix}$ vérifie

$$\det P_k = -\frac{1}{k} \to 0$$

— elle « dégénère », ce qui explique la perte de diagonalisabilité.

Réponse. A_k diagonalisable, $A_k \to N$ non diagonalisable ; vecteurs propres qui deviennent colinéaires.

Correction de l'exercice 9 – Rayon spectral et normes

a) Si $AX = \lambda X$ avec $X \neq 0$: $|\lambda|\|X\| = \|AX\| \leq \|A\|\|X\|$, d'où $|\lambda| \leq \|A\|$.

b) A^n a pour valeurs propres les λ^n, donc a) donne $\rho(A)^n = \rho(A^n) \leq \|A^n\|$. Et $A^n = PD^nP^{-1}$ avec $\|D^n\| = \rho(A)^n$ (pour la norme subordonnée à une norme ℓ^p sur une diagonale). D'où la majoration.

c) En prenant les racines n-ièmes :

$$\rho(A) \leq \|A^n\|^{1/n} \leq \left(\|P\|\|P^{-1}\|\right)^{1/n} \rho(A)$$

— et le facteur $(\|P\|\|P^{-1}\|)^{1/n} \to 1$. Par encadrement, $\|A^n\|^{1/n} \to \rho(A)$.

Réponse. $\rho(A) \leq \|A\|$; encadrement $\rho^n \leq \|A^n\| \leq C\rho^n$; $\|A^n\|^{1/n} \to \rho(A)$.

Correction de l'exercice 10 – Fonctions d'une matrice diagonalisable

a) $\Pi_1 = \frac{A - 2I}{1 - 2} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\Pi_2 = \frac{A - I}{2 - 1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; on vérifie $\Pi_1 + \Pi_2 = I$ et $\Pi_1 + 2\Pi_2 = A$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

b) $\cos(\pi A) = -\Pi_1 + \Pi_2 = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Et

$$\sqrt{A} = \Pi_1 + \sqrt{2}\,\Pi_2 = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2}-1 \\ 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

c) $(\sqrt{A})^2 = \Pi_1 + 2\Pi_2 = A$ (car $\Pi_1\Pi_2 = 0$ et $\Pi_i^2 = \Pi_i$). Directement : le coefficient $(1,2)$ vaut $(\sqrt{2}-1) + (\sqrt{2}-1)\sqrt{2} = (\sqrt{2}-1)(1+\sqrt{2}) = 1$ ✓.

Réponse. $\Pi_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\Pi_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; $\cos(\pi A) = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\sqrt{A} = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2}-1 \\ 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$.

Correction de l’exercice 11 – La limite de (I + A/n)ⁿ

a) $I + \frac{A}{n} = P\left(I + \frac{D}{n}\right)P^{-1}$, et la puissance n-ième d’une diagonale se calcule coefficient par coefficient.

b) Pour tout complexe λ, $\left(1 + \frac{\lambda}{n}\right)^n = \exp\left(n \ln\left(1 + \frac{\lambda}{n}\right)\right) \to \mathrm{e}^{\lambda}$ (développement $n\ln(1+\frac{\lambda}{n}) = \lambda + O(\frac{1}{n})$, avec la détermination principale du logarithme pour n grand). Par continuité du produit matriciel :

$$\left(I + \frac{A}{n}\right)^n \to P\,\mathrm{diag}(\mathrm{e}^{\lambda_i})P^{-1} = \exp(A)$$

c) Valeurs propres ± 1 : la limite est $\exp\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh 1 & \sinh 1 \\ \sinh 1 & \cosh 1 \end{pmatrix}$.

Réponse. $\left(I + \frac{A}{n}\right)^n \to \exp(A)$; ici $\begin{pmatrix} \cosh 1 & \sinh 1 \\ \sinh 1 & \cosh 1 \end{pmatrix}$.

Correction de l’exercice 12 – Stabilité d’un système différentiel

a) Dans une base propre, $X(t) = \sum c_i \mathrm{e}^{\lambda_i t} V_i$ et $|\mathrm{e}^{\lambda_i t}| = \mathrm{e}^{\mathrm{Re}(\lambda_i)t}$. Toutes les solutions tendent vers 0 si et seulement si chaque $\mathrm{e}^{\lambda_i t} \to 0$, c’est-à-dire $\mathrm{Re}\lambda_i < 0$ (prendre $X(0) = V_i$ pour la réciproque).

b) Même raisonnement : $\mathrm{e}^{\lambda_i t}$ bornée sur $\mathbb{R}_+ \Leftrightarrow \mathrm{Re}\lambda_i \le 0$.

c) $\chi_A = (X+1)^2 + 4$, valeurs propres $-1 \pm 2i$: partie réelle $-1 < 0$, toutes les solutions tendent vers 0 (spirale amortie). $\chi_B = X^2 + 1$, valeurs propres $\pm i$:

$$\mathrm{Re}(\pm i) = 0$$

— solutions bornées (cercles) mais ne tendant pas vers 0.

Réponse. Tendent vers 0 ssi $\mathrm{Re}\lambda_i < 0$; bornées ssi $\mathrm{Re}\lambda_i \le 0$; A : amorti, B : périodique.

Correction de l’exercice 13 – Puissances bornées

a) $A^n = PD^nP^{-1}$ et $\|D^n\| = \rho(A)^n \le 1$ (norme subordonnée à $\|\cdot\|_\infty$), donc $\|A^n\| \le \|P\|\|P^{-1}\|$.

b) Si $AX = \lambda X$ avec $|\lambda| > 1$, alors $\|A^n X\| = |\lambda|^n \|X\| \to +\infty$, ce qui contredit le caractère borné.

c) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, non bornée, alors que

$$\rho = 1$$

— Il manque la diagonalisabilité : un bloc de Jordan de valeur propre de module 1 fait apparaître un facteur polynomial n.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Réponse. Diagonalisable et $\rho \le 1 \Rightarrow$ bornée ; bornée $\Rightarrow \rho \le 1$; le bloc de Jordan est un contre-exemple.

Correction de l'exercice 14 – Valeurs propres et continuité en taille 2

a) Racines de $X^2 - \operatorname{tr}(M)X + \det M$:

$$\lambda_{\max}(M) = \frac{\operatorname{tr} M + \sqrt{\Delta(M)}}{2}$$

b) Composée de fonctions continues (la racine carrée est continue sur $\mathbb{R}_+$).

c) $\operatorname{tr} = 2$, $\det = 1 - \varepsilon$, $\Delta = 4 - 4 + 4\varepsilon = 4\varepsilon$, donc $\lambda_{\max} = 1 + \sqrt{\varepsilon}$. Une perturbation d'ordre ε déplace la valeur propre de $\sqrt{\varepsilon}$, beaucoup plus : les valeurs propres d'une matrice non diagonalisable (M_0 est un bloc de Jordan) sont très sensibles aux perturbations.

Réponse. $\lambda_{\max} = \frac{\operatorname{tr} M + \sqrt{\Delta}}{2}$ continue ; $\lambda_{\max}(M_\varepsilon) = 1 + \sqrt{\varepsilon}$.

Correction de l'exercice 15 – Synthèse : exponentielle et système amorti

a) $\chi_A = X^2 + 3X + 2 = (X+1)(X+2)$. Projecteurs de Lagrange :

$$\Pi_{-1} = \frac{A + 2I}{-1+2} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \Pi_{-2} = \frac{A + I}{-2+1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

— Contrôle : $\Pi_{-1} + \Pi_{-2} = I$ ✓.

b) $\exp(tA) = \mathrm{e}^{-t}\Pi_{-1} + \mathrm{e}^{-2t}\Pi_{-2} = \begin{pmatrix} 2\mathrm{e}^{-t} - \mathrm{e}^{-2t} & \mathrm{e}^{-t} - \mathrm{e}^{-2t} \\ -2\mathrm{e}^{-t} + 2\mathrm{e}^{-2t} & -\mathrm{e}^{-t} + 2\mathrm{e}^{-2t} \end{pmatrix}$.

c) $(y, y')(t) = \exp(tA)(1, 0)$, d'où $y(t) = 2\mathrm{e}^{-t} - \mathrm{e}^{-2t}$. Vérification : $y(0) = 1$, $y'(0) = -2 + 2 = 0$ ✓. Les valeurs propres sont de partie réelle négative : $y(t) \to 0$ (régime apériodique).

Réponse. $\exp(tA) = \mathrm{e}^{-t}\Pi_{-1} + \mathrm{e}^{-2t}\Pi_{-2}$; $y = 2\mathrm{e}^{-t} - \mathrm{e}^{-2t} \to 0$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).