Plaquette 1 – Critères, matrice de passage et applications aux puissances et aux suites

Diagonalisation — Prépa MP / MPI (2e année)

Exercices

Méthode

On teste la diagonalisabilité (valeurs propres distinctes, dimensions propres, polynôme minimal), on construit P et D telles que $A = PDP^{-1}$, puis on applique la réduction au calcul de A^n, à des suites couplées et à des systèmes différentiels.

Exercice 1 – Diagonalisation explicite

Diagonaliser $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$: donner P, D et vérifier.

Exercice 2 – Calcul de puissances

Avec la matrice précédente, calculer A^n.

Exercice 3 – Diagonalisabilité à discuter

Pour quelles valeurs de a la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable ?

Exercice 4 – Matrice 3x3

Diagonaliser $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ si possible.

Exercice 5 – Suites couplées

Soient $u_0 = 1$, $v_0 = 0$ et $\begin{cases} u_{n+1} = u_n + 2v_n \\ v_{n+1} = 2u_n + v_n \end{cases}$. Exprimer u_n et v_n.

Exercice 6 – Système différentiel

Résoudre $\begin{cases} x' = x + 2y \\ y' = 2x + y \end{cases}$ avec $x(0) = 1$, $y(0) = 0$.

Exercice 7 – Racine carrée d'une matrice

Déterminer une matrice B telle que $B^2 = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 8 – Endomorphisme diagonalisable

Soit $u : \mathbb{R}_1[X] \to \mathbb{R}_1[X]$, $P \mapsto P(0) + P(1)X$. Diagonaliser u.

Exercice 9 – Co-diagonalisation

Soient $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$. Vérifier qu'elles commutent et interpréter.

Exercice 10 – Diagonalisation d'une matrice symétrique

Diagonaliser $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ en base **orthonormée**.

Exercice 11 – Limite de puissances

Soit $A = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}3 \\ 0{,}2 & 0{,}7 \end{pmatrix}$ (matrice de transition). Déterminer $\lim_{n \to +\infty} A^n$.

Exercice 12 – Puissances par diagonalisation explicite

Soit $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Déterminer les valeurs propres et des vecteurs propres de A.
b) Écrire P, D, P^{-1} avec $A = PDP^{-1}$.
c) En déduire A^n et vérifier pour $n = 1$.

Exercice 13 – Rotation diagonalisée sur C

Soit $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$, $\theta \notin \pi\mathbb{Z}$.

a) Diagonaliser R_θ dans $M_2(\mathbb{C})$.
b) En déduire $R_\theta^n = R_{n\theta}$.
c) Pour quels θ existe-t-il $n \geq 1$ tel que $R_\theta^n = I$?

Exercice 14 – Une matrice symétrique 3x3

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

a) Écrire $A = I + J$ et en déduire le spectre de A.
b) Déterminer une base orthonormée de vecteurs propres.
c) Calculer A^n sous la forme $\alpha_n I + \beta_n J$.

Exercice 15 – Synthèse : diagonalisation d'une matrice 3x3

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

a) Diagonaliser A.
b) Calculer A^n.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).