Plaquette 3 – Diagonalisation et équations matricielles

Diagonalisation — Prépa MP / MPI (2e année)

Exercices

Méthode

Une équation polynomiale $Q(A) = 0$ donne un **polynôme annulateur** : si Q est scindé à racines simples, A est diagonalisable et son spectre est inclus dans les racines de Q. On en déduit la **forme réduite** de A (à similitude près), donc son rang, sa trace, son déterminant, le nombre de classes de similitude. Pour une équation en l'inconnue X du type $X^2 = A$, on remarque que X **commute** avec A : si les valeurs propres de A sont simples, X est un polynôme en A et se diagonalise dans la même base. Sur $\mathbb{R}$, les racines complexes non réelles vont **par paires conjuguées**, ce qui impose des conditions de parité.

Exercice 1 – Les matrices vérifiant A³ = A

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ telle que $A^3 = A$.

a) Montrer que A est diagonalisable et préciser les valeurs propres possibles.

b) Montrer que $\mathrm{rg} A = \mathrm{tr}(A^2)$.

c) Combien y a-t-il de classes de similitude de telles matrices ?

Exercice 2 – L'équation A² + A + I = 0 sur R

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ telle que $A^2 + A + I = 0$.

a) Montrer que A n'a pas de valeur propre réelle et que A est diagonalisable sur $\mathbb{C}$.

b) En déduire que n est pair, puis calculer $\det A$ et $\mathrm{tr} A$.

c) Donner un exemple pour $n = 2$.

Exercice 3 – Les structures complexes : A² = -I

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ telle que $A^2 = -I_n$.

a) Montrer que n est pair, $n = 2m$, et que $\det A = 1$.

b) Soit $x \neq 0$. Montrer que (x, Ax) est libre et que $\mathrm{Vect}(x, Ax)$ est stable.

c) En déduire que A est semblable à la matrice diagonale par blocs $\mathrm{diag}(J, \dots, J)$ avec $J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ (on admettra qu'on peut itérer en choisissant un supplémentaire stable).

Exercice 4 – Diagonalisable et A³ = A² : un projecteur

Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$ diagonalisable telle que $A^3 = A^2$.

a) Déterminer les valeurs propres possibles.

b) Montrer que $A^2 = A$.

c) Le résultat subsiste-t-il sans l'hypothèse de diagonalisabilité ?

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 5 – Noyaux et images pour u² = u + 2 id

Soit $u \in L(E)$ tel que $u^2 - u - 2\,\mathrm{id} = 0$.

a) Montrer que $E = \ker(u - 2\,\mathrm{id}) \oplus \ker(u + \mathrm{id})$.

b) Montrer que $\mathrm{Im}(u - 2\,\mathrm{id}) = \ker(u + \mathrm{id})$ et $\mathrm{Im}(u + \mathrm{id}) = \ker(u - 2\,\mathrm{id})$.

c) Exprimer les projecteurs associés, puis u^{-1}.

Exercice 6 – La matrice par blocs [[0, A], [I, 0]]

Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$ et $M = \begin{pmatrix} 0 & A \\ I_n & 0 \end{pmatrix} \in M_{2n}(\mathbb{C})$.

a) Calculer M^2.

b) Montrer que si M est diagonalisable, alors A l'est, et que A est inversible (comparer $\ker M$ et $\ker M^2$).

c) Réciproquement, montrer que si A est diagonalisable et inversible, M l'est.

Exercice 7 – Les projecteurs des matrices 2 × 2

On cherche les $X \in M_2(\mathbb{R})$ telles que $X^2 = X$.

a) Montrer que X est semblable à 0, I_2 ou $\mathrm{diag}(1, 0)$.

b) Montrer que les solutions de rang 1 sont exactement les matrices de trace 1 et de déterminant 0.

c) En déduire que $\begin{pmatrix} a & b \\ c & 1-a \end{pmatrix}$ est un projecteur si et seulement si $bc = a(1-a)$, et donner un exemple non symétrique.

Exercice 8 – Racines carrées d'un bloc de Jordan

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I + N$.

a) Montrer que toute solution X de $X^2 = A$ commute avec N, puis qu'elle s'écrit $X = aI + bN$.

b) Résoudre $X^2 = A$.

c) Les solutions sont-elles diagonalisables ? Et l'équation $X^2 = N$ a-t-elle des solutions ?

Exercice 9 – Racines carrées d'une matrice symétrique

Soit $A = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$.

a) Diagonaliser A et écrire $A = 9Q_1 + Q_2$ avec Q_1, Q_2 projecteurs spectraux.

b) Montrer que toute solution de $X^2 = A$ s'écrit $X = \alpha Q_1 + \beta Q_2$.

c) Donner les quatre solutions.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 10 – Les racines cubiques de l'identité en taille 2

On cherche les $X \in M_2(\mathbb{R})$ telles que $X^3 = I_2$.

a) Montrer que π_X divise $(X-1)(X^2+X+1)$ et en déduire $\pi_X \in \{X-1, X^2+X+1\}$.

b) Décrire toutes les solutions.

c) Montrer que les solutions autres que I_2 sont toutes semblables, et en donner une.

Exercice 11 – uv diagonalisable mais pas vu

a) Soit $U = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $V = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer UV et VU ; sont-elles diagonalisables ?

b) Montrer que UV et VU ont toujours le même polynôme caractéristique.

c) Montrer que si U est inversible, UV et VU sont simultanément diagonalisables ou non.

Exercice 12 – Une matrice triangulaire par blocs [[A, B], [0, A]]

Soit $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ qui commutent, A diagonalisable, et $M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & A \end{pmatrix}$.

a) Montrer que pour tout polynôme Q, $Q(M) = \begin{pmatrix} Q(A) & Q'(A)B \\ 0 & Q(A) \end{pmatrix}$.

b) On suppose M diagonalisable et on prend $Q = \pi_M$. Montrer que $Q'(A)$ est inversible.

c) En déduire que M est diagonalisable si et seulement si $B = 0$.

Exercice 13 – L'endomorphisme v ↦ p ∘ v ∘ p

Soit p un projecteur de E de rang r ($\dim E = n$) et $\Phi : v \mapsto p \circ v \circ p$ sur $L(E)$.

a) Montrer que Φ est un projecteur, donc diagonalisable.

b) Déterminer $\mathrm{rg}\,\Phi$ à l'aide de matrices par blocs dans une base adaptée à $E = \mathrm{Im}\,p \oplus \ker p$.

c) En déduire $\mathrm{tr}\,\Phi$.

Exercice 14 – Valeurs propres de M ↦ AMB

Soit $A = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, $B = \mathrm{diag}(\mu_1, \dots, \mu_n)$ et $\Theta : M \mapsto AMB$.

a) Calculer $\Theta(E_{ij})$.

b) En déduire que Θ est diagonalisable et donner $\mathrm{tr}\,\Theta$ et $\det \Theta$.

c) Généraliser au cas où A et B sont seulement diagonalisables.

Exercice 15 – Synthèse : l'équation A³ + A² + A = 0 sur R

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ telle que $A^3 + A^2 + A = 0$.

a) Montrer que A est diagonalisable sur $\mathbb{C}$ et préciser son spectre possible.

b) Montrer que $\mathrm{rg}\,A$ est pair et que $\mathrm{tr}\,A = -\frac{\mathrm{rg}\,A}{2}$.

c) Montrer que $\mathbb{R}^n = \ker A \oplus \mathrm{Im}\,A$ et que l'induit de A sur $\mathrm{Im}\,A$ vérifie $B^2 + B + I = 0$.

d) Donner un exemple de taille 3 et de rang 2.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).