Plaquette 2 – Diagonalisation pratique : matrices 3 × 3 et 4 × 4

Diagonalisation — Prépa MP / MPI (2e année)

Exercices

Méthode

La diagonalisation effective suit toujours le même protocole : **(1)** calculer χ_A (en exploitant la structure : ligne ou colonne à un seul terme, somme des lignes constante, matrice triangulaire) ; **(2)** pour chaque valeur propre, résoudre $(A-\lambda I)X=0$ et compter $\dim E_\lambda = n - \mathrm{rg}(A-\lambda I)$; **(3)** conclure sur la diagonalisabilité ; **(4)** ranger les vecteurs propres **en colonnes** dans P dans l'ordre des valeurs propres de D. On contrôle systématiquement : $\mathrm{tr}A = \sum \lambda_i$, $\det A = \prod \lambda_i$, et $AX = \lambda X$ sur chaque vecteur trouvé.

Exercice 1 – Trois valeurs propres distinctes

Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

a) Vérifier que $(1,1,0)$, $(0,1,1)$, $(1,1,1)$ sont vecteurs propres de A et préciser les valeurs propres.

b) En déduire χ_A, puis P et D.

c) Contrôler avec la trace et le déterminant.

Exercice 2 – Une valeur propre double diagonalisable

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & -3 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

a) Calculer χ_A en développant selon la première ligne.

b) Déterminer E_2 et E_{-1}.

c) Conclure et donner P, D.

Exercice 3 – Une valeur propre double non diagonalisable

Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Vérifier que $\chi_A = X^3 - 5X^2 + 8X - 4$ et le factoriser.

b) Calculer $\mathrm{rg}(A - 2I)$.

c) Conclure. A est-elle trigonalisable ?

Exercice 4 – Discussion selon deux paramètres

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & 2 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ avec a, b réels.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

a) Donner le spectre de A.
b) Montrer que A est diagonalisable si et seulement si $ab = 1$.
c) Diagonaliser A pour $a = 2$, $b = \frac{1}{2}$.

Exercice 5 – Matrice diagonale par blocs

Soit $M = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{R})$ avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

a) Déterminer χ_M.
b) Montrer que A est diagonalisable et pas B.
c) En déduire que M n'est pas diagonalisable. Énoncer le résultat général.

Exercice 6 – Matrice compagnon et Vandermonde

Soit $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 6 & -11 & 6 \end{pmatrix}$.

a) Calculer χ_C et le factoriser.
b) Montrer que $(1, \lambda, \lambda^2)$ est vecteur propre pour chaque racine λ.
c) Écrire la matrice de passage et justifier qu'elle est inversible.

Exercice 7 – Matrice triangulaire à diagonale distincte

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

a) Justifier sans calcul que A est diagonalisable.
b) Déterminer une base de vecteurs propres.
c) Pourquoi la matrice de passage obtenue est-elle triangulaire ?

Exercice 8 – Valeurs propres irrationnelles

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Calculer χ_A.
b) Diagonaliser A.
c) En déduire A^{2k} et A^{2k+1} sans multiplier de matrices.

Exercice 9 – Inverse par diagonalisation

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Vérifier que les colonnes de P sont des vecteurs propres de A et préciser D.
b) Calculer P^{-1}.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

c) En déduire $A^{-1} = PD^{-1}P^{-1}$ et vérifier une colonne.

Exercice 10 – Une matrice de rang 2

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Déterminer le rang de A et $\ker A$.

b) Trouver les autres valeurs propres à l'aide de la trace et de vecteurs évidents.

c) Diagonaliser A en base orthonormée.

Exercice 11 – Reconstruire une matrice à partir de ses éléments propres

Déterminer la matrice $A \in M_3(\mathbb{R})$ telle que $E_1 = \text{Vect}(1,0,1)$ et $E_2 = \text{Vect}((1,1,0),(0,1,1))$.

a) Justifier l'existence et l'unicité de A.

b) Calculer A.

c) Vérifier que $(A - I)(A - 2I) = 0$.

Exercice 12 – Matrice d'un projecteur et d'une symétrie

Soit p le projecteur de $\mathbb{R}^3$ sur le plan $\Pi = \{x + y + z = 0\}$ parallèlement à $D = \mathbb{R}(1,0,0)$, et s la symétrie associée.

a) Exprimer $p(v)$ pour $v = (x,y,z)$ et écrire sa matrice.

b) Vérifier $p^2 = p$, $\text{tr}p = \text{rg}p$.

c) Écrire la matrice de $s = 2p - \text{id}$ et diagonaliser p et s dans une même base.

Exercice 13 – Une matrice 4 × 4 antidiagonale

Soit $K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $M = aI + bK$.

a) Diagonaliser K.

b) En déduire les valeurs propres de M et $\det M$.

c) Pour quels (a,b) la matrice M est-elle inversible ?

Exercice 14 – Décomposition spectrale

Soit A diagonalisable, $A = PDP^{-1}$, C_i les colonnes de P et L_i les lignes de P^{-1}.

a) Montrer que $A = \sum_i \lambda_i C_i L_i$ et que les $\Pi_i = C_i L_i$ vérifient $\Pi_i \Pi_j = \delta_{ij}\Pi_i$ et $\sum \Pi_i = I$.

b) En déduire $Q(A) = \sum_i Q(\lambda_i)\Pi_i$ pour tout polynôme Q.

c) Application : pour la matrice $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ de valeurs propres 2 et 3, avec $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, calculer Π_1, Π_2 et vérifier $A = 2\Pi_1 + 3\Pi_2$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 15 – Synthèse : puissances et comportement asymptotique

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \\ 3 & -3 & 2 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Vérifier que les colonnes de P sont propres et donner D.

b) Calculer P^{-1} et écrire $A^n = M_1 + (-1)^n M_2 + 2^n M_3$.

c) Vérifier pour $n = 2$, puis déterminer $\lim \frac{A^n}{2^n}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).