Plaquette 5 – Diagonalisation : problèmes de synthèse

Diagonalisation — Prépa MP / MPI (2e année)

Exercices

Méthode

Les exercices d'oral sur la diagonalisation demandent de **reconnaître la bonne stratégie** : un polynôme annulateur caché dans l'énoncé ($A^{\mathsf{T}} = A^2$ donne $A^4 = A$), une décomposition naturelle de l'espace (symétriques et antisymétriques, polynômes pairs et impairs), une relation de commutation ($AB - BA = B$) qu'on itère, une structure géométrique (rotation, permutation). On termine toujours par une **vérification** : trace, déterminant, ou calcul direct sur un vecteur.

Exercice 1 – L'endomorphisme M ↦ M + 2Mᵀ

Soit $\varphi : M \mapsto M + 2M^{\mathsf{T}}$ sur $M_n(\mathbb{R})$.

a) Calculer $\varphi(S)$ pour S symétrique et $\varphi(A)$ pour A antisymétrique.

b) En déduire que φ est diagonalisable, son spectre et un polynôme annulateur.

c) Calculer $\operatorname{tr}\varphi$ et $\det\varphi$.

Exercice 2 – La matrice des quotients i/j

Soit $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ avec $a_{ij} = \frac{i}{j}$.

a) Écrire $A = UV^{\mathsf{T}}$ et donner son rang.

b) Calculer $\operatorname{tr} A$ et conclure sur la diagonalisabilité.

c) Donner les valeurs propres et une base propre pour $n = 3$.

Exercice 3 – L'opérateur P ↦ P(X + 1) + P(X - 1)

Soit $u : P \mapsto P(X+1) + P(X-1)$ sur $\mathbb{R}_n[X]$, $n \geq 2$.

a) Montrer, avec la formule de Taylor, que $u = 2\,\mathrm{id} + 2\sum_{k \geq 1} \frac{D^{2k}}{(2k)!}$ où D est la dérivation.

b) En déduire que 2 est l'unique valeur propre de u.

c) u est-il diagonalisable ? Déterminer E_2.

Exercice 4 – Diagonalisabilité de M ↦ AM

Soit $A \in M_n(\mathrm{K})$ et $L_A : M \mapsto AM$.

a) Montrer que $Q(L_A) = L_{Q(A)}$ pour tout polynôme Q.

b) En déduire que $\pi_{L_A} = \pi_A$.

c) Conclure, puis appliquer à $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 5 – Si AB - BA = B, alors B est nilpotente

Soit $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ telles que $AB - BA = B$.

a) Montrer par récurrence que $AB^k - B^kA = kB^k$ pour tout $k \geq 1$.

b) On note $\Phi : M \mapsto AM - MA$. Montrer que si $B^k \neq 0$, alors k est valeur propre de Φ.

c) En déduire que B est nilpotente.

Exercice 6 – L'équation $A^T = A^2$

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ telle que $A^{\mathsf{T}} = A^2$.

a) Montrer que $A^4 = A$.

b) En déduire que A est diagonalisable sur $\mathbb{C}$ et préciser son spectre possible.

c) Montrer que A est diagonalisable sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $A^2 = A$ (on admettra qu'alors A est un projecteur orthogonal).

Exercice 7 – Une matrice de permutation comme rotation

Soit $P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Montrer que P est orthogonale, de déterminant 1 : c'est une rotation de $\mathbb{R}^3$.

b) Déterminer son axe et son angle.

c) Diagonaliser P sur $\mathbb{C}$.

Exercice 8 – Une matrice bistochastique

Soit $P = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}(I + J)$.

a) Déterminer le spectre de P et une base orthonormée de vecteurs propres.

b) Calculer P^n.

c) Interpréter : une chaîne de Markov de matrice P « oublie » son état initial à quelle vitesse ?

Exercice 9 – La matrice de Fourier

Soit $\omega = \mathrm{e}^{2i\pi/n}$ et $F = (\omega^{(k-1)(l-1)})_{1 \leq k, l \leq n}$.

a) Montrer que $\overline{F}F = nI_n$ (utiliser $\sum_{m=0}^{n-1} \omega^{mp} = 0$ si $n \nmid p$).

b) Montrer que $F^2 = nS$, où S est la matrice de la permutation $k \mapsto -k$ des indices modulo n, et en déduire $F^4 = n^2 I$.

c) En déduire que F est diagonalisable et que $\mathrm{Sp}F \subset \{\sqrt{n}, -\sqrt{n}, i\sqrt{n}, -i\sqrt{n}\}$. Vérifier pour $n = 2$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 10 – Le renversement des coefficients

Soit $r : P \mapsto X^n P\left(\frac{1}{X}\right)$ sur $\mathbb{R}_n[X]$ (si $P = \sum a_k X^k$, $r(P) = \sum a_k X^{n-k}$).

a) Montrer que r est une symétrie.

b) Déterminer E_1 et E_{-1} (polynômes réciproques et antiréciproques) et leurs dimensions.

c) En déduire $\mathrm{tr} r$ selon la parité de n.

Exercice 11 – A est un polynôme en A³

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ diagonalisable et $B = A^3$.

a) Montrer qu'il existe un polynôme Q tel que $Q(\mu^3) = \mu$ pour toute valeur propre μ de A.

b) En déduire que $A = Q(B)$.

c) Le résultat subsiste-t-il pour $B = A^2$? Donner un contre-exemple.

Exercice 12 – Déterminant de I + A pour un projecteur

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ un projecteur ($A^2 = A$) de rang r.

a) Calculer $\det(I + A)$ et $\det(I - A)$.

b) Montrer que $I + A$ est inversible et que $(I + A)^{-1} = I - \frac{1}{2}A$.

c) Calculer $\exp(A)$.

Exercice 13 – Si une puissance est diagonalisable

Soit $A \in GL_n(\mathbb{C})$ et $k \geq 1$ tel que A^k soit diagonalisable.

a) Écrire $\pi_{A^k} = \prod_i (X - \mu_i)$ (μ_i distincts non nuls) et montrer que $Q = \prod_i (X^k - \mu_i)$ annule A.

b) Montrer que Q est à racines simples.

c) Conclure. L'hypothèse « A inversible » est-elle nécessaire ?

Exercice 14 – Diagonalisation simultanée de trois symétries

Soit $S_1 = \mathrm{diag}(1, -1, -1)$, $S_2 = \mathrm{diag}(-1, 1, -1)$ et $S_3 = S_1 S_2$.

a) Vérifier que S_1, S_2, S_3 sont des symétries qui commutent deux à deux.

b) Montrer que $G = \{I, S_1, S_2, S_3\}$ est un groupe isomorphe à $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$.

c) Plus généralement, montrer que des matrices $A_1, \ldots, A_p$ diagonalisables qui commutent deux à deux sont simultanément diagonalisables (récurrence sur la dimension ou sur p).

Exercice 15 – Synthèse : une rotation de R³

Soit $R = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

a) Montrer que R est orthogonale de déterminant 1.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

b) Déterminer l'axe et l'angle de la rotation.

c) Donner les valeurs propres complexes de R ; R est-elle diagonalisable sur $\mathbb{R}$? sur $\mathbb{C}$?

d) Calculer R^2 et R^6, et interpréter.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).