Plaquette 4 – Diagonalisation, topologie et exponentielle de matrices

Diagonalisation — Prépa MP / MPI (2e année)

Exercices

Méthode

La diagonalisation est un outil d'**analyse matricielle** : pour $A = PDP^{-1}$, toute « fonction de A » (puissances, exponentielle, limite, racine) se calcule sur D puis se transporte. Pour passer d'un résultat sur les matrices diagonalisables à **toutes** les matrices, on utilise la **densité** des matrices diagonalisables dans $M_n(\mathbb{C})$ et la **continuité** des applications en jeu (déterminant, trace, polynôme caractéristique, exponentielle). Attention : sur $\mathbb{R}$, cette densité est fausse, et une limite de matrices diagonalisables n'est pas forcément diagonalisable.

Exercice 1 – Densité des matrices diagonalisables sur C

Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$, trigonalisée : $A = PTP^{-1}$ avec T triangulaire de diagonale $(t_1, \dots, t_n)$.

a) Montrer qu'il existe des suites $(\varepsilon_i^{(k)})_k$ tendant vers 0 telles que les $t_i + \varepsilon_i^{(k)}$ soient deux à deux distincts.

b) En déduire une suite A_k de matrices diagonalisables tendant vers A.

c) Conclure que l'ensemble des matrices diagonalisables est dense dans $M_n(\mathbb{C})$.

Exercice 2 – Non-densité sur R

Soit $J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et, pour $M \in M_2(\mathbb{R})$, $\Delta(M) = (\mathrm{tr} M)^2 - 4 \det M$.

a) Montrer que si M est diagonalisable sur $\mathbb{R}$, alors $\Delta(M) \geq 0$.

b) Calculer $\Delta(J)$ et montrer qu'il existe une boule centrée en J ne contenant aucune matrice diagonalisable sur $\mathbb{R}$.

c) Conclure.

Exercice 3 – Cayley-Hamilton par densité

a) Montrer que si $A = PDP^{-1}$ est diagonalisable, alors $\chi_A(A) = 0$.

b) Montrer que l'application $A \mapsto \chi_A(A)$ est continue sur $M_n(\mathbb{C})$.

c) En déduire le théorème de Cayley-Hamilton sur $M_n(\mathbb{C})$, puis sur $M_n(\mathbb{R})$.

Exercice 4 – Déterminant de l'exponentielle

a) Montrer que si $A = PDP^{-1}$, alors $\exp(A) = P \exp(D) P^{-1}$, et en déduire $\det \exp(A) = \mathrm{e}^{\mathrm{tr} A}$ pour A diagonalisable.

b) Étendre le résultat à toute $A \in M_n(\mathbb{C})$ (on admet la continuité de exp).

c) En déduire que $\exp(A)$ est toujours inversible, et que $\exp(A) \in SL_n$ si $\mathrm{tr} A = 0$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 5 – Exponentielle d'une matrice symétrique

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Diagonaliser A et écrire ses projecteurs spectraux.

b) Calculer $\exp(A)$ puis $\exp(tA)$.

c) Vérifier $\det \exp(A) = \mathrm{e}^{\mathrm{tr}A}$.

Exercice 6 – Convergence de la suite des puissances

Soit A diagonalisable, $A = \sum_i \lambda_i \Pi_i$ (décomposition spectrale, λ_i distincts).

a) Montrer que (A^n) converge si et seulement si, pour tout i, $|\lambda_i| < 1$ ou $\lambda_i = 1$.

b) Préciser la limite dans ce cas.

c) Étudier $A = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 7 – Classe de similitude non fermée

Soit $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $P_t = \mathrm{diag}(1, t)$, $t > 0$.

a) Calculer $P_t^{-1} N P_t$.

b) En déduire que 0 est adhérent à la classe de similitude de N, et que cette classe n'est pas fermée.

c) Montrer en revanche que la classe de similitude de 0 (ou d'une matrice scalaire) est réduite à un point.

Exercice 8 – Une limite de diagonalisables

Soit $A_k = \begin{pmatrix} \frac{1}{k} & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Montrer que A_k est diagonalisable et la diagonaliser.

b) Déterminer la limite de A_k ; est-elle diagonalisable ?

c) Que deviennent les vecteurs propres quand $k \to +\infty$?

Exercice 9 – Rayon spectral et normes

Soit $\|\cdot\|$ une norme subordonnée sur $M_n(\mathbb{C})$ et $\rho(A) = \max |\lambda|$.

a) Montrer que $\rho(A) \leq \|A\|$.

b) On suppose $A = PDP^{-1}$. Montrer que $\rho(A)^n \leq \|A^n\| \leq \|P\|\|P^{-1}\|\rho(A)^n$.

c) En déduire $\|A^n\|^{1/n} \to \rho(A)$ (formule de Gelfand dans le cas diagonalisable).

Exercice 10 – Fonctions d'une matrice diagonalisable

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

a) Déterminer les projecteurs spectraux Π_1 et Π_2 (polynômes de Lagrange en A).

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

b) Pour une fonction f, on pose $f(A) = f(1)\Pi_1 + f(2)\Pi_2$. Calculer $\cos(\pi A)$ et $\sqrt{A}$ (avec $f = \sqrt{\cdot}$).

c) Vérifier que $(\sqrt{A})^2 = A$.

Exercice 11 – La limite de (I + A/n)ⁿ

Soit A diagonalisable, $A = PDP^{-1}$.

a) Montrer que $\left(I + \frac{A}{n}\right)^n = P\mathrm{diag}\left(\left(1 + \frac{\lambda_i}{n}\right)^n\right)P^{-1}$.

b) En déduire que $\left(I + \frac{A}{n}\right)^n \to \exp(A)$.

c) Application : calculer $\lim \left(I + \frac{1}{n}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right)^n$.

Exercice 12 – Stabilité d'un système différentiel

Soit A diagonalisable sur $\mathbb{C}$, de valeurs propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, et $X' = AX$.

a) Montrer que toutes les solutions tendent vers 0 en $+\infty$ si et seulement si $\mathrm{Re}\lambda_i < 0$ pour tout i.

b) Montrer que toutes les solutions sont bornées sur $\mathbb{R}_+$ si et seulement si $\mathrm{Re}\lambda_i \leq 0$ pour tout i.

c) Étudier $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 13 – Puissances bornées

Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$.

a) Montrer que si A est diagonalisable et $\rho(A) \leq 1$, la suite (A^n) est bornée.

b) Montrer que si (A^n) est bornée, alors $\rho(A) \leq 1$.

c) Montrer que $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ a un rayon spectral égal à 1 mais des puissances non bornées. Que manque-t-il ?

Exercice 14 – Valeurs propres et continuité en taille 2

Pour $M \in M_2(\mathbb{R})$ à valeurs propres réelles, on note $\lambda_{\max}(M)$ la plus grande.

a) Exprimer $\lambda_{\max}(M)$ en fonction de $\mathrm{tr}M$ et $\Delta(M) = (\mathrm{tr}M)^2 - 4\det M$.

b) En déduire que $\lambda_{\max}$ est continue sur l'ensemble $\{\Delta \geq 0\}$.

c) Calculer $\lambda_{\max}$ pour $M_\varepsilon = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \varepsilon & 1 \end{pmatrix}$, $\varepsilon \geq 0$, et étudier la vitesse de variation quand $\varepsilon \to 0$.

Exercice 15 – Synthèse : exponentielle et système amorti

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$ (matrice de l'équation $y'' + 3y' + 2y = 0$).

a) Diagonaliser A et déterminer ses projecteurs spectraux.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

b) Calculer $\exp(tA)$.
c) En déduire la solution de $y'' + 3y' + 2y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$, et sa limite en $+\infty$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).