Plaquette 4 – Coefficients variables : solutions développables en série entière et raccordements

Équations différentielles linéaires — Prépa MP / MPI (2e année)

Corrections détaillées

Boîte à outils

Méthode des séries entières. On écrit $y=\sum a_n t^n$, $ty'=\sum n a_n t^n$, $y''=\sum (n+2)(n+1)a_{n+2}t^n$, $t^2y''=\sum n(n-1)a_n t^n$, on identifie le coefficient de t^n, et l'on vérifie un rayon $R>0$ (règle de d'Alembert sur la récurrence).

Unicité. Sur un intervalle où $y''+a(t)y'+b(t)y=0$ est résolue (a, b continues), une solution vérifiant $y(t_0)=y'(t_0)=0$ est nulle ; les zéros d'une solution non nulle sont donc isolés.

Raccordement. Une solution sur $\mathbb{R}$ d'une équation singulière en 0 se recolle à partir des solutions sur $]-\infty,0[$ et $]0,+\infty[$, avec la régularité exigée en 0 :

$$\lim_{0^-} y = \lim_{0^+} y, \qquad \lim_{0^-} y' = \lim_{0^+} y', \ \dots$$

Correction de l'exercice 1 – Une solution qui est une exponentielle de carré

a) Coefficient de t^n : $(n+2)(n+1)a_{n+2}-2na_n-2a_n=0$, soit $(n+2)(n+1)a_{n+2}=2(n+1)a_n$.

b) $a_{2k}=\frac{2}{2k}a_{2k-2}=\frac{1}{k}a_{2k-2}$, donc $a_{2k}=\frac{1}{k!}$ et

$$y=\sum_{k\geq 0}\frac{t^{2k}}{k!}=\mathrm{e}^{t^2}$$

(vérification : $y'=2t\mathrm{e}^{t^2}$, $y''=(2+4t^2)\mathrm{e}^{t^2}$, $y''-2ty'-2y=0$).

c) $a_{2k+1}=\dfrac{2^k}{3\cdot 5\cdots(2k+1)}$; rapport $\frac{a_{2k+3}}{a_{2k+1}}=\frac{2}{2k+3}\to 0$: rayon infini.

Réponse. $a_{n+2}=\frac{2a_n}{n+2}$; solution paire e^{t^2} ; solution impaire de coefficients $\dfrac{2^k}{3\cdot 5\cdots(2k+1)}$, rayon infini.

Correction de l'exercice 2 – Une équation de Legendre

a) Coefficient de t^n : $(n+2)(n+1)a_{n+2}-n(n-1)a_n-2na_n+2a_n=0$, et $n^2+n-2=(n+2)(n-1)$.

b) Impaire : $a_3=0$, donc $y=a_1 t$. Paire : $a_2=-a_0$, puis $a_{2k+2}=\frac{2k-1}{2k+1}a_{2k}$, d'où $a_{2k}=-\frac{1}{2k-1}$ pour $k\geq 1$; rapport $\to 1$: rayon 1.

c) $y=1-\sum_{k\geq 1}\frac{t^{2k}}{2k-1}=1-t\operatorname{argth} t$, soit

$$y=1-\frac{t}{2}\ln\frac{1+t}{1-t}$$

Réponse. Solutions t et $1-\frac{t}{2}\ln\frac{1+t}{1-t}$ (rayon 1).

Correction de l'exercice 3 – Cosinus hyperbolique d'une racine

a) Coefficient de t^n : $4(n+1)na_{n+1}+2(n+1)a_{n+1}-a_n=0$, et $(n+1)(4n+2)=(2n+2)(2n+1)$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

b) $a_n = \frac{a_0}{(2n)!}$, rayon infini, et pour $t > 0$:

$$y = \sum_{n \geq 0} \frac{t^n}{(2n)!} = \operatorname{ch}\sqrt{t}$$

c) $z(s) = \operatorname{sh} s$ avec $s = \sqrt{t}$: $y' = \frac{z'}{2\sqrt{t}}$, $y'' = \frac{z''}{4t} - \frac{z'}{4t^{3/2}}$, d'où $4ty'' + 2y' = z'' = z = y$. Mais $\operatorname{sh}\sqrt{t} = \sqrt{t}\left(1 + \frac{t}{6} + \cdots\right)$ n'est pas dérivable en 0 : pas développable.

Réponse. $a_n = \frac{a_0}{(2n)!}$, solution $\operatorname{ch}\sqrt{t}$; $\operatorname{sh}\sqrt{t}$ est solution mais pas développable en 0.

Correction de l'exercice 4 – Raccordement à l'ordre deux

a) $r(r-1) = 2$, $r = 2$ ou -1 : $y = \alpha t^2 + \frac{\beta}{t}$.

b) De même $y = \gamma t^2 + \frac{\delta}{t}$ sur $]-\infty, 0[$.

c) Une solution sur $\mathbb{R}$ est bornée près de 0 : $\beta = \delta = 0$. On a alors $y = \alpha t^2$ ($t > 0$), γt^2 ($t < 0$), $y(0) = 0$; y' existe et vaut 0 en 0, et

$$y''(0) = \lim_{t \to 0} \frac{y'(t)}{t} \text{ existe} \Leftrightarrow 2\alpha = 2\gamma$$

Les solutions sur $\mathbb{R}$ sont les αt^2 : espace de dimension 1.

Réponse. Sur chaque demi-droite $\alpha t^2 + \frac{\beta}{t}$; sur $\mathbb{R}$, seulement $y = \alpha t^2$.

Correction de l'exercice 5 – Une série entière solution d'un problème de Cauchy

a) Coefficient de t^n : $(n+1)a_{n+1} = a_{n-1} + \delta_{n,0}$, avec $a_0 = y(0) = 0$: $a_1 = 1$ et $(n+1)a_{n+1} = a_{n-1}$ pour $n \geq 1$.

b) Les pairs sont nuls ; $a_{2k+1} = \frac{a_{2k-1}}{2k+1} = \frac{1}{3 \cdot 5 \cdots (2k+1)} = \frac{2^k k!}{(2k+1)!}$; rapport $\to 0$: rayon infini.

c) Variation de la constante :

$$y(t) = \mathrm{e}^{t^2/2} \int_0^t \mathrm{e}^{-s^2/2}\, \mathrm{d}s$$

dont le développement est la série de b) (unicité de la solution du problème de Cauchy).

Réponse. $y = \sum \frac{2^k k!}{(2k+1)!} t^{2k+1} = \mathrm{e}^{t^2/2} \int_0^t \mathrm{e}^{-s^2/2}\, \mathrm{d}s$.

Correction de l'exercice 6 – Une équation exacte

a) $\left((1+t^2)y\right)' = 2ty + (1+t^2)y'$, puis $\left((1+t^2)y\right)'' = 2y + 4ty' + (1+t^2)y''$.

b) $(1+t^2)y = a + bt$: $y = \frac{a+bt}{1+t^2}$.

c) Coefficient de t^n : $(n+2)(n+1)a_{n+2} + (n(n-1) + 4n + 2)a_n = 0$, soit $a_{n+2} = -a_n$. Avec $a_0 = 1$, $a_1 = 0$:

$$y = \sum_k (-1)^k t^{2k} = \frac{1}{1+t^2}, \qquad R = 1$$

alors que la solution est définie sur $\mathbb{R}$ (rayon limité par les pôles $\pm i$).

Réponse. $y = \frac{a+bt}{1+t^2}$; la série $\sum (-1)^k t^{2k}$ a pour rayon 1.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l'exercice 7 – Polynômes d'Hermite

a) Coefficient de t^k : $(k+2)(k+1)a_{k+2} - 2ka_k + 2na_k = 0$.

b) Si l'on part de $a_0 = 1$, $a_1 = 0$ (n pair) ou $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ (n impair), la récurrence donne $a_{n+2} = 0$ puis tous les coefficients suivants de même parité : polynôme de degré n.

c) $n = 2$: $a_2 = \frac{2(0-2)}{2}a_0 = -2a_0$, d'où $y = 1 - 2t^2$ (proportionnel à $H_2 = 4t^2 - 2$). $n = 3$: $a_3 = \frac{2(1-3)}{6}a_1 = -\frac{2}{3}a_1$, d'où

$$y = t - \frac{2}{3}t^3 \quad \text{(proportionnel à } H_3 = 8t^3 - 12t\text{)}$$

Réponse. Solution polynomiale de degré n ; $n = 2$: $1 - 2t^2$; $n = 3$: $t - \frac{2}{3}t^3$.

Correction de l'exercice 8 – Aucune solution développable

a) Coefficient constant : $-a_0 = 0$; de t : $-a_1 = -1$; de t^n ($n \geq 2$) : $(n-1)a_{n-1} - a_n = 0$.

b) $a_n = (n-1)!$: la série $\sum (n-1)!t^n$ a un rayon nul.

c) Aucune solution n'est développable en série entière en 0. Sur $]0, +\infty[$: $y_h = C\mathrm{e}^{-1/t}$, et la variation donne

$$y(t) = \mathrm{e}^{-1/t}\left(C - \int \frac{\mathrm{e}^{1/s}}{s}\,\mathrm{d}s\right)$$

(la série divergente $\sum (n-1)!t^n$ en est le développement asymptotique : c'est l'exemple d'Euler).

Réponse. $a_n = (n-1)!$: rayon nul, aucune solution développable.

Correction de l'exercice 9 – Fonction de Bessel d'indice un demi

a) $y' = \frac{z'}{\sqrt{t}} - \frac{z}{2t^{3/2}}$, $y'' = \frac{z''}{\sqrt{t}} - \frac{z'}{t^{3/2}} + \frac{3z}{4t^{5/2}}$, d'où

$$t^2y'' + ty' + \left(t^2 - \frac{1}{4}\right)y = t^{3/2}(z'' + z) + \frac{z}{\sqrt{t}}\left(\frac{3}{4} - \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) = t^{3/2}(z'' + z)$$

b) $y = \frac{A\cos t + B\sin t}{\sqrt{t}}$.

c) Sous forme résolue, $a(t) = \frac{1}{t}$, donc $W = \frac{C}{t}$. Directement : $W\left(\frac{\sin t}{\sqrt{t}}, \frac{\cos t}{\sqrt{t}}\right) = \frac{1}{t}W(\sin, \cos) = -\frac{1}{t}$ (les termes en $\frac{1}{2t^{3/2}}$ se compensent) ✓.

Réponse. $y = \frac{A\cos t + B\sin t}{\sqrt{t}}$; wronskien $-\frac{1}{t}$, conforme à Liouville.

Correction de l'exercice 10 – Équation de Tchebychev par changement de variable

a) $z' = \cos\theta\, y'(\sin\theta)$, $z'' = -\sin\theta\, y' + \cos^2\theta\, y''$, et $\cos^2\theta = 1 - t^2$:

$$z'' + z = (1 - t^2)y'' - ty' + y = 0$$

b) $z = A\sin\theta + B\cos\theta$, soit $y = At + B\sqrt{1 - t^2}$.

c) Toutes : $\sqrt{1 - t^2} = \sum \binom{1/2}{k}(-1)^k t^{2k}$ a pour rayon 1 ; t est un polynôme. Le rayon 1 correspond aux points singuliers ± 1.

Réponse. $y = At + B\sqrt{1 - t^2}$, toutes développables (rayon 1 pour $\sqrt{1 - t^2}$).

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l’exercice 11 – Abaisser l’ordre par une dérivée exacte

a) $(y' + ty)' = y'' + y + ty'$.

b) $y' + ty = C$, puis variation de la constante :

$$y = \mathrm{e}^{-t^2/2}\left(A + C\int_0^t \mathrm{e}^{s^2/2}\,\mathrm{d}s\right)$$

c) $C = 0$, $A = 1$: $y = \mathrm{e}^{-t^2/2} = \sum_k \frac{(-1)^k t^{2k}}{2^k k!}$ (la seconde solution, impaire, n’est pas élémentaire).

Réponse. $y = \mathrm{e}^{-t^2/2}(A + C\int_0^t \mathrm{e}^{s^2/2})$; solution paire $\mathrm{e}^{-t^2/2}$.

Correction de l’exercice 12 – Problème de Cauchy en un point singulier

a) $(ty)' = \sin t$, d’où $ty = 1 - \cos t + C$ et $y = \frac{1 - \cos t + C}{t}$ sur chaque demi-droite.

b) Une solution sur $\mathbb{R}$ est continue en 0, ce qui impose $C = 0$ des deux côtés. La fonction

$$y(t) = \frac{1 - \cos t}{t} = \sum_{k \geq 1} \frac{(-1)^{k+1} t^{2k-1}}{(2k)!}$$

prolongée par 0, est développable (rayon infini) et vérifie l’équation sur $\mathbb{R}$ (en 0 : $0 + 0 = \sin 0$).

c) $y = \frac{t}{2} - \frac{t^3}{24} + \frac{t^5}{720} - \cdots$

Réponse. Unique solution sur $\mathbb{R}$: $y = \frac{1 - \cos t}{t} = \frac{t}{2} - \frac{t^3}{24} + \cdots$.

Correction de l’exercice 13 – L’équation d’Airy

a) Coefficient constant : $2a_2 = 0$; de t^{n+1} : $(n+3)(n+2)a_{n+3} + a_n = 0$.

b) $y_1 = 1 - \frac{t^3}{6} + \frac{t^6}{180} - \cdots$ et

$$y_2 = t - \frac{t^4}{12} + \frac{t^7}{504} - \cdots$$

le rapport $\frac{|a_{n+3}|}{|a_n|} \to 0$: rayon infini.

c) Si $y(t_0) = 0$ et $y'(t_0) = 0$, l’unicité (Cauchy-Lipschitz) donne $y = 0$. Donc en un zéro $y'(t_0) \neq 0$, et y change de signe et ne s’annule pas au voisinage pointé de t_0.

Réponse. $a_{n+3} = -\frac{a_n}{(n+3)(n+2)}$, rayon infini ; zéros isolés par unicité.

Correction de l’exercice 14 – Zéros simultanés de deux solutions

a) Leur wronskien est nul en t_0 : $W(t_0) = y_1(t_0)y_2'(t_0) - y_1'(t_0)y_2(t_0) = 0$. Or $W = W(t_0)\mathrm{e}^{-\int a}$, donc $W = 0$ partout et la famille est liée (sinon W ne s’annulerait jamais).

b) Même argument avec $y_1'(t_0) = y_2'(t_0) = 0$.

c) Non : les solutions nulles en 0 sont

$$y = B\sin t$$

une seule direction.

Réponse. Zéro (ou extremum) commun $\Rightarrow W = 0 \Rightarrow$ solutions liées ; pour $y'' + y = 0$, seules les $B\sin t$ s’annulent en 0.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l’exercice 15 – Synthèse : les polynômes de Legendre

a) Coefficient de t^k : $(k+2)(k+1)a_{k+2} - k(k-1)a_k - 2ka_k + n(n+1)a_k = 0$, et $k(k+1) - n(n+1) = (k-n)(k+n+1)$.

b) En partant de l’indice de même parité que n, le facteur $(k-n)$ annule a_{n+2} et tous les suivants de cette parité : polynôme de degré n.

c) $n=2$: $a_2 = -3a_0$, d’où $1 - 3t^2$ (proportionnel à $P_2 = \frac{3t^2-1}{2}$). $n=3$: $a_3 = \frac{(1-3)\cdot 5}{6} a_1 = -\frac{5}{3}a_1$, d’où

$$t - \frac{5}{3}t^3 \quad \text{(proportionnel à } P_3 = \frac{5t^3-3t}{2}\text{)}$$

d) Pour l’autre parité, aucun coefficient ne s’annule et $\frac{a_{k+2}}{a_k} \to 1$: rayon 1, la somme est une série non polynomiale, singulière en ± 1 (comme en exercice 2 pour $n=1$).

Réponse. Récurrence $a_{k+2} = \frac{(k-n)(k+n+1)}{(k+1)(k+2)} a_k$: polynôme de degré n ($1 - 3t^2$, $t - \frac{5}{3}t^3$) et une solution de rayon 1.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).