Plaquette 2 – Équations scalaires d'ordre 1 et 2 : variation des constantes et wronskien

Équations différentielles linéaires — Prépa MP / MPI (2e année)

Corrections détaillées

Boîte à outils

Ordre 1. $y' + a(t)y = b(t)$ sur un intervalle : $y = \mathrm{e}^{-A}\left(C + \int b\,\mathrm{e}^{A}\right)$, A primitive de a.

Ordre 2, coefficients constants. $y'' + py' + qy = P(t)\mathrm{e}^{mt}$ admet une solution $Q(t)\mathrm{e}^{mt}$ avec $\deg Q = \deg P + \mu$, où $\mu \in \{0,1,2\}$ est la multiplicité de m comme racine de $r^2 + pr + q$.

Wronskien et variation des constantes. Pour $y'' + a(t)y' + b(t)y = f(t)$ et une base (y_1, y_2) des solutions homogènes, $W = y_1y_2' - y_1'y_2$ vérifie $W' = -aW$, et

$$y = \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2, \qquad \lambda_1' = -\frac{y_2 f}{W}, \quad \lambda_2' = \frac{y_1 f}{W}$$

Correction de l'exercice 1 – Ordre un avec second membre

a) $y_h = C\mathrm{e}^{-t^2}$, et la constante $\frac{1}{2}$ est solution particulière : $y = \frac{1}{2} + C\mathrm{e}^{-t^2}$.

b) On cherche $z' - z = \mathrm{e}^{it}$ sous la forme $\alpha\mathrm{e}^{it}$: $\alpha(i-1) = 1$, $\alpha = \frac{-1-i}{2}$. La partie imaginaire donne

$$y_p = \mathrm{Im}\left(\frac{-1-i}{2}\mathrm{e}^{it}\right) = -\frac{\sin t + \cos t}{2}$$

et $y = C\mathrm{e}^{t} - \frac{\sin t + \cos t}{2}$.

c) $y(0) = C - \frac{1}{2} = 0$: $y = \frac{\mathrm{e}^{t} - \sin t - \cos t}{2}$.

Réponse. a) $y = \frac{1}{2} + C\mathrm{e}^{-t^2}$; b) $y = C\mathrm{e}^{t} - \frac{\sin t + \cos t}{2}$; c) $C = \frac{1}{2}$.

Correction de l'exercice 2 – Variation de la constante à l'ordre un

a) $y_h = \frac{C}{\sqrt{1+t^2}}$ ($\int \frac{t}{1+t^2} = \frac{1}{2}\ln(1+t^2)$). Variation : $(1+t^2)\frac{C'}{\sqrt{1+t^2}} = 1$, $C' = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$, $C = \mathrm{argsh}\,t + K$:

$$y = \frac{\mathrm{argsh}\,t + K}{\sqrt{1+t^2}}$$

b) $y_h = \frac{C}{\sqrt{1-t^2}}$; variation : $C' = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$, $y = \frac{\arcsin t + K}{\sqrt{1-t^2}}$.

c) Le numérateur tend vers $\frac{\pi}{2} + K$ et le dénominateur vers 0 : limite finie si et seulement si $K = -\frac{\pi}{2}$ (et alors $\arcsin t - \frac{\pi}{2} \sim -\sqrt{2(1-t)}$, donc $y \to -1$).

Réponse. a) $y = \frac{\mathrm{argsh}\,t + K}{\sqrt{1+t^2}}$; b) $y = \frac{\arcsin t + K}{\sqrt{1-t^2}}$, limite finie en 1 ssi $K = -\frac{\pi}{2}$.

Correction de l'exercice 3 – Résonance

a) $y_p = \frac{t}{2}\sin t$: $y_p'' = \cos t - \frac{t}{2}\sin t$, donc $y_p'' + y_p = \cos t$. Solution générale $y = A\cos t + B\sin t + \frac{t}{2}\sin t$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

b) $y_p = \dfrac{\cos(\omega t)}{1-\omega^2}$, et $y = A\cos t + B\sin t + \dfrac{\cos \omega t}{1-\omega^2}$.

c) Avec $y(0) = y'(0) = 0$: en a), $y = \dfrac{t}{2}\sin t$ (amplitude croissante) ; en b), $y = \dfrac{\cos \omega t - \cos t}{1-\omega^2}$, et

$$\frac{\cos \omega t - \cos t}{1-\omega^2} \underset{\omega \to 1}{\longrightarrow} \frac{t \sin t}{2}$$

(dérivée de $\omega \mapsto \cos \omega t$ divisée par celle de $1-\omega^2$) : la résonance est la limite de battements de plus en plus lents.

Réponse. $y'' + y = \cos t$: $y_p = \dfrac{t}{2}\sin t$ (résonance) ; pour $\omega \neq 1$: $\dfrac{\cos \omega t}{1-\omega^2}$, de limite $\dfrac{t \sin t}{2}$.

Correction de l'exercice 4 – Second membre polynôme fois exponentielle

a) $r^2 - 3r + 2 = (r-1)(r-2)$: $y_h = A\mathrm{e}^t + B\mathrm{e}^{2t}$.

b) 1 est racine simple : Q de degré 2, sans terme constant (absorbé par y_h). Avec $y_p = (at^2 + bt)\mathrm{e}^t$:

$$y_p'' - 3y_p' + 2y_p = (-2at + 2a - b)\mathrm{e}^t$$

donc $-2a = 1$ et $2a - b = 0$: $a = -\frac{1}{2}$, $b = -1$.

c) $y = A\mathrm{e}^t + B\mathrm{e}^{2t} - \left(\dfrac{t^2}{2} + t\right)\mathrm{e}^t$; $y(0) = A + B = 0$, $y'(0) = A + 2B - 1 = 0$: $B = 1$, $A = -1$.

Réponse. $y_p = -(\frac{t^2}{2} + t)\mathrm{e}^t$; avec les conditions : $y = \mathrm{e}^{2t} - \mathrm{e}^t - (\frac{t^2}{2} + t)\mathrm{e}^t$.

Correction de l'exercice 5 – Seconde solution par le wronskien

a) $y_1'' = 0$ et $\frac{1}{t}\cdot 1 - \frac{1}{t^2}t = 0$.

b) $W' = -\frac{1}{t}W$ donne $W = \dfrac{C}{t}$. Avec $C = -2$: $\left(\dfrac{y_2}{t}\right)' = -\dfrac{2}{t^3}$, d'où $\dfrac{y_2}{t} = \dfrac{1}{t^2}$, soit

$$y_2(t) = \frac{1}{t}$$

(on vérifie : $\frac{2}{t^3} - \frac{1}{t^3} - \frac{1}{t^3} = 0$).

c) $W(t, \frac{1}{t}) = t\cdot\left(-\dfrac{1}{t^2}\right) - \dfrac{1}{t} = -\dfrac{2}{t}$, puis $\lambda_1' = -\dfrac{y_2 f}{W} = \dfrac{1}{2}$, $\lambda_2' = \dfrac{y_1 f}{W} = -\dfrac{t^2}{2}$: $\lambda_1 = \dfrac{t}{2}$, $\lambda_2 = -\dfrac{t^3}{6}$, et $y_p = \dfrac{t^2}{2} - \dfrac{t^2}{6} = \dfrac{t^2}{3}$ (vérification : $\frac{2}{3} + \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = 1$ ✓).

Réponse. $y_2 = \dfrac{1}{t}$; solution particulière $\dfrac{t^2}{3}$; $y = \lambda t + \dfrac{\mu}{t} + \dfrac{t^2}{3}$.

Correction de l'exercice 6 – Variation des constantes avec un second membre singulier

a) $W = \cos t \cdot \cos t - (-\sin t)\sin t = 1$.

b) $\lambda_1' = -\dfrac{\sin t}{\cos t}$, $\lambda_2' = \dfrac{\cos t}{\cos t} = 1$: $\lambda_1 = \ln(\cos t)$, $\lambda_2 = t$, d'où

$$y_p = \cos t \ln(\cos t) + t \sin t$$

c) $y_p' = t\cos t - \sin t \ln\cos t$, $y_p'' = \cos t - t\sin t - \cos t \ln\cos t + \dfrac{\sin^2 t}{\cos t}$, et $y_p'' + y_p = \cos t + \dfrac{\sin^2 t}{\cos t} = \dfrac{1}{\cos t}$ ✓.

Réponse. $y = A\cos t + B\sin t + \cos t \ln(\cos t) + t\sin t$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l'exercice 7 – Changement de fonction inconnue

a) $y' = \mathrm{e}^{-t^2}(z' - 2tz)$ et $y'' = \mathrm{e}^{-t^2}\Big(z'' - 4tz' + (4t^2 - 2)z\Big)$, d'où

$$y'' + 4ty' + (4t^2 + 2)y = \mathrm{e}^{-t^2}\Big(z'' - 4tz' + (4t^2 - 2)z + 4tz' - 8t^2 z + (4t^2 + 2)z\Big) = \mathrm{e}^{-t^2} z''$$

b) $z = A + Bt$: $y = (A + Bt)\mathrm{e}^{-t^2}$.

c) $z'' = 1$: $z = \frac{t^2}{2} + A + Bt$, et $y = \left(\frac{t^2}{2} + A + Bt\right)\mathrm{e}^{-t^2}$.

Réponse. $y = \mathrm{e}^{-t^2} z$ avec $z'' = 0$: $y = (A + Bt)\mathrm{e}^{-t^2}$; avec second membre : $(\frac{t^2}{2} + A + Bt)\mathrm{e}^{-t^2}$.

Correction de l'exercice 8 – Recollement à l'ordre un

a) $(ty)' = 2t$, donc $ty = t^2 + C$ et $y = t + \frac{C}{t}$ sur chaque demi-droite.

b) Une solution sur $\mathbb{R}$ doit avoir une limite finie en 0 des deux côtés : $C_+ = C_- = 0$.
L'unique solution est

$$y(t) = t$$

c) $y = \lambda t$ sur chaque demi-droite ; le raccord en 0 est continu ($y(0) = 0$), mais la dérivabilité impose $\lambda_+ = \lambda_-$: solutions $y = \lambda t$, espace de dimension 1.

Réponse. $ty' + y = 2t$: unique solution $y = t$ sur $\mathbb{R}$; $ty' - y = 0$: $y = \lambda t$.

Correction de l'exercice 9 – Comportement asymptotique d'une solution

a) $y(t) = \mathrm{e}^{-t}\Big(y(0) + \int_0^t \frac{\mathrm{e}^s}{1+s^2}\,\mathrm{d}s\Big)$.

b) Pour $s \in \left[\frac{t}{2}, t\right]$, $\frac{\mathrm{e}^s}{1+s^2} \le \frac{4\mathrm{e}^s}{t^2}$, et $\int_0^{t/2} \frac{\mathrm{e}^s}{1+s^2} \le \mathrm{e}^{t/2}$. Donc

$$0 \le \mathrm{e}^{-t}\int_0^t \frac{\mathrm{e}^s}{1+s^2}\,\mathrm{d}s \le \mathrm{e}^{-t/2} + \frac{4}{t^2} \longrightarrow 0$$

c) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{e}^t}{t^2} = \frac{\mathrm{e}^t}{t^2}\Big(1 - \frac{2}{t}\Big) \sim \frac{\mathrm{e}^t}{1+t^2}$, fonctions positives d'intégrales divergentes : les intégrales sont équivalentes. Donc $y(t) \sim \frac{1}{t^2}$ pour toute solution (le terme $y(0)\mathrm{e}^{-t}$ est négligeable).

Réponse. Toutes les solutions tendent vers 0, et $y(t) \sim \frac{1}{t^2}$ indépendamment de $y(0)$.

Correction de l'exercice 10 – Solution périodique

a) Avec $y = a\cos t + b\sin t$: $y' + y = (a+b)\cos t + (b-a)\sin t$, d'où $a + b = 1$ et $b - a = 0$:

$$y_p = \frac{\cos t + \sin t}{2}$$

b) Les solutions sont $y_p + C\mathrm{e}^{-t}$, et $C\mathrm{e}^{-t}$ n'est périodique que si $C = 0$.

c) $|y(t) - y_p(t)| = |C|\mathrm{e}^{-t} \to 0$: le régime transitoire s'éteint, il ne reste que le régime forcé.

Réponse. $y_p = \frac{\cos t + \sin t}{2}$, unique solution périodique, limite de toutes les autres ($C\mathrm{e}^{-t} \to 0$).

Correction de l'exercice 11 – Second membre polynomial

a) $r^2 + r - 2 = (r-1)(r+2)$: $y_h = A\mathrm{e}^t + B\mathrm{e}^{-2t}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

b) $y_p = at^2 + bt + c$: $2a + (2at + b) - 2(at^2 + bt + c) = t^2$, d'où $-2a = 1$, $2a - 2b = 0$, $2a + b - 2c = 0$, soit

$$y_p = -\frac{t^2}{2} - \frac{t}{2} - \frac{3}{4}$$

c) $y + \frac{t^2}{2} = Ae^t + Be^{-2t} - \frac{t}{2} - \frac{3}{4}$ est $O(t)$ si et seulement si $A = 0$ (B quelconque).

Réponse. $y = Ae^t + Be^{-2t} - \frac{t^2}{2} - \frac{t}{2} - \frac{3}{4}$; croissance polynomiale ssi $A = 0$.

Correction de l'exercice 12 – Un problème aux limites

a) $\lambda = -k^2 < 0$: $y = A\mathrm{ch}(kt) + B\mathrm{sh}(kt)$, $y(0) = A = 0$, $y(\pi) = B\mathrm{sh}(k\pi) = 0$, donc $B = 0$. $\lambda = 0$: $y = A + Bt$, nulle. Pas de solution non nulle.

b) $y = A\cos\omega t + B\sin\omega t$; $y(0) = A = 0$, puis $B\sin(\omega\pi) = 0$ avec $B \neq 0$:

$$\sin(\omega\pi) = 0 \Leftrightarrow \omega \in \mathbb{N}^* \ (\omega > 0)$$

c) Pour $\lambda = n^2$: $y = B\sin(nt)$, droite de solutions ; les « valeurs propres » n^2 sont les fréquences propres au carré.

Réponse. Solutions non nulles ssi $\lambda = n^2$, $n \geq 1$, et alors $y = B\sin(nt)$.

Correction de l'exercice 13 – Abaissement de l'ordre

a) $y = t$: $0 - 2t + 2t = 0$ ✓.

b) $y = tz$, $y' = z + tz'$, $y'' = 2z' + tz''$:
$(1 + t^2)(2z' + tz'') - 2t(z + tz') + 2tz = t(1 + t^2)z'' + 2z' = 0$. Avec $w = z'$:
$\frac{w'}{w} = -\frac{2}{t(1+t^2)} = -\frac{2}{t} + \frac{2t}{1+t^2}$, donc $w = \frac{1+t^2}{t^2}$ et $z = t - \frac{1}{t}$, d'où

$$y_2 = t\left(t - \frac{1}{t}\right) = t^2 - 1$$

(polynôme : on vérifie $2(1 + t^2) - 4t^2 + 2t^2 - 2 = 0$ ✓).

c) $y = \alpha t + \beta(t^2 - 1)$ sur $\mathbb{R}$ (le coefficient $1 + t^2$ ne s'annule pas).

Réponse. $y_1 = t$, $y_2 = t^2 - 1$; $y = \alpha t + \beta(t^2 - 1)$.

Correction de l'exercice 14 – Ordre un sur un intervalle ouvert

a) $\frac{y'}{y} = \frac{2t}{1-t^2}$, d'où $\ln|y| = -\ln(1 - t^2) + c$ et $y_h = \frac{C}{1-t^2}$.

b) $y = -1$: $0 + 2t = 2t$ ✓. Donc

$$y = -1 + \frac{C}{1 - t^2}$$

c) Bornée si et seulement si $C = 0$: seule la solution constante -1 est bornée.

Réponse. $y = -1 + \frac{C}{1-t^2}$; seule $y = -1$ est bornée.

Correction de l'exercice 15 – Synthèse : solutions bornées d'un oscillateur forcé

a) Avec $W(\cos, \sin) = 1$: $\lambda_1' = -\sin s\, f(s)$, $\lambda_2' = \cos s\, f(s)$, et
$y = \cos t \int_0^t -\sin s f + \sin t \int_0^t \cos s f = \int_0^t \sin(t - s) f(s)\, \mathrm{d}s$, nulle en 0, de dérivée
$\int_0^t \cos(t - s) f(s)\, \mathrm{d}s$ nulle en 0.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

b) $|y_0(t)| \le \int_0^t |f| \le \int_0^{+\infty} |f|$, et toute solution s'écrit $y_0 + A\cos t + B\sin t$.

c) $|y_0(t)| \le \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}s}{1+s^2} = \frac{\pi}{2}$.

d) $f = \cos$ n'est pas intégrable, et

$$y_0(t) = \int_0^t \sin(t-s)\cos s \,\mathrm{d}s = \frac{t}{2}\sin t$$

non bornée (résonance).

Réponse. $y_0 = \int_0^t \sin(t-s) f(s)\,\mathrm{d}s$; si f intégrable, $|y_0| \le \int |f|$; pour $f = \cos$, $y_0 = \frac{t}{2}\sin t$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).