Plaquette 5 – Problèmes de synthèse : zéros des solutions, équations non linéaires réductibles et problèmes aux limites

Équations différentielles linéaires — Prépa MP / MPI (2e année)

Corrections détaillées

Boîte à outils

Wronskien. Pour $y'' + q(t)y = 0$, $W = y_1y_2' - y_1'y_2$ est constant ; plus généralement, si $y_1'' + q_1y_1 = 0$ et $y_2'' + q_2y_2 = 0$:

$$(y_1y_2' - y_1'y_2)' = (q_1 - q_2)y_1y_2$$

Réductions. Bernoulli $y' + a(t)y = b(t)y^\alpha$: poser $z = y^{1-\alpha}$. Riccati $y' = a(t)y^2 + b(t)y + c(t)$ avec une solution y_1 : poser $y = y_1 + \frac{1}{z}$, alors z vérifie une équation linéaire d'ordre 1.

Équation intégrale. $f(t) = g(t) + \int_0^t (t-s)f(s)\,ds$ équivaut à $f'' = g'' + f$ avec $f(0) = g(0)$, $f'(0) = g'(0)$.

Correction de l'exercice 1 – Théorème de séparation de Sturm

a) Si $y_1'(t_1) = 0$, alors y_1 serait nulle (unicité). Entre deux zéros consécutifs, y_1 garde un signe, disons > 0 : $y_1'(t_1) > 0$ et $y_1'(t_2) < 0$.

b) $W(t_1) = -y_1'(t_1)y_2(t_1)$ et $W(t_2) = -y_1'(t_2)y_2(t_2)$. Si y_2 garde un signe sur $[t_1, t_2]$, ces deux nombres sont de signes opposés ; mais

$$W' = y_1y_2'' - y_1''y_2 = -qy_1y_2 + qy_1y_2 = 0$$

donc W est constant, et non nul (indépendance) : contradiction.

c) y_2 s'annule strictement entre deux zéros consécutifs de y_1 : les zéros s'entrelacent. Exemple : les zéros de cos ($\frac{\pi}{2} + k\pi$) et de sin ($k\pi$) alternent.

Réponse. Le wronskien, constant et non nul, interdit à y_2 de garder un signe entre deux zéros de y_1 : les zéros s'entrelacent.

Correction de l'exercice 2 – Théorème de comparaison de Sturm

a) $z'' = -\omega^2 z$, donc

$$W' = yz'' - y''z = (q - \omega^2)yz$$

b) Sur $[a, b]$, $z \geq 0$ et $y > 0$: $W' \geq 0$. Or $W(a) = y(a)z'(a) = \omega y(a) > 0$ et $W(b) = y(b)z'(b) = -\omega y(b) < 0$ (car $z(a) = z(b) = 0$), ce qui contredit la croissance. Donc y s'annule sur $[a, b]$ (même raisonnement si $y < 0$).

c) $q \geq 4 = 2^2$: tout segment de longueur $\frac{\pi}{2}$ contient un zéro.

Réponse. $W' = (q - \omega^2)yz \geq 0$ contredit $W(a) > 0 > W(b)$: un zéro dans tout segment de longueur $\frac{\pi}{\omega}$.

Correction de l'exercice 3 – Coefficient négatif : au plus un zéro

a) Sur $[t_1, t_2]$, $y \geq 0$ et $y'' = -qy \geq 0$.

b) Une fonction convexe nulle en t_1 et t_2 est négative ou nulle sur $[t_1, t_2]$ (sous la corde) : contradiction avec $y > 0$. Si y avait deux zéros, en prenant deux zéros consécutifs (zéros isolés), on serait dans la situation précédente (quitte à changer y en $-y$).

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

c) Les solutions $Ae^{t}+Be^{-t}$ s'annulent au plus une fois :

$$Ae^{t}+Be^{-t}=0 \Leftrightarrow e^{2t}=-\frac{B}{A}$$

Réponse. Pour $q \le 0$, une solution entre deux zéros serait convexe et positive : impossible, au plus un zéro.

Correction de l'exercice 4 – Une équation de Bernoulli

a) $z'=-\frac{y'}{y^2}=-\frac{y^2-y}{y^2}=-1+\frac{1}{y}=-1+z$.

b) $z=1+Ce^{t}$, donc $y=\frac{1}{1+Ce^{t}}$ (et la solution nulle).

c) $y(0)=\frac{1}{1+C}=2$, $C=-\frac{1}{2}$:

$$y(t)=\frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{t}}=\frac{2}{2-e^{t}}$$

définie sur $]-\infty,\ln 2[$ (explosion en $\ln 2$) : une équation non linéaire peut avoir des solutions non globales.

Réponse. $y=\frac{1}{1+Ce^{t}}$; avec $y(0)=2$: $y=\frac{2}{2-e^{t}}$ sur $]-\infty,\ln 2[$.

Correction de l'exercice 5 – Une équation de Riccati

a) $-\frac{\lambda}{t^2}=\frac{\lambda^2-2}{t^2}$, soit $\lambda^2+\lambda-2=0$: $\lambda=1$ ou -2. On prend $y_1=\frac{1}{t}$.

b) $y'=-\frac{1}{t^2}-\frac{z'}{z^2}$ et $y^2-\frac{2}{t^2}=\frac{1}{t^2}+\frac{2}{tz}+\frac{1}{z^2}-\frac{2}{t^2}$. En égalant et en multipliant par $-z^2$: $z'=-\frac{2z}{t}-1$.

c) $(t^2z)'=t^2z'+2tz=-t^2$, donc $z=\frac{C}{t^2}-\frac{t}{3}$ et

$$y=\frac{1}{t}+\frac{3t^2}{3C-t^3}$$

(on retrouve $-\frac{2}{t}$ pour $C=0$, et $\frac{1}{t}$ comme limite $C\to\infty$).

Réponse. $y=\frac{1}{t}+\frac{3t^2}{3C-t^3}$ (avec les solutions particulières $\frac{1}{t}$ et $-\frac{2}{t}$).

Correction de l'exercice 6 – Énergie d'un oscillateur amorti

a) $E'=2y'y''+2\omega^2yy'=2y'(-2\alpha y')=-4\alpha y'^2$.

b) Les racines de $r^2+2\alpha r+\omega^2$ ont une partie réelle <0 (somme -2α, produit $\omega^2>0$) : toutes les solutions et leurs dérivées tendent vers 0, donc $E\to 0$.

c) $r=-\alpha\pm i\sqrt{\omega^2-\alpha^2}$: $y=e^{-\alpha t}(A\cos\Omega t+B\sin\Omega t)$ avec $\Omega=\sqrt{\omega^2-\alpha^2}$, pseudo-période $\frac{2\pi}{\Omega}$, et

$$E(t)=O\left(e^{-2\alpha t}\right)$$

Réponse. $E'=-4\alpha y'^2$, $E\to 0$; pseudo-période $\frac{2\pi}{\sqrt{\omega^2-\alpha^2}}$, décroissance en $e^{-2\alpha t}$.

Correction de l'exercice 7 – Croissance des solutions quand q est positif

a) $y'(0)=1>0$ et $y(0)=0$: $y>0$ sur un intervalle $]0,\eta]$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

b) Sur $]0,T[$, $y'' = qy \geq 0$, donc y' croît et $y' \geq y'(0) = 1$, puis $y(t) \geq t$. Si T était fini, par continuité $y(T) \geq T > 0$, et y resterait positive un peu au-delà de T : contradiction. Donc

$$y(t) \geq t \quad \text{pour tout } t \geq 0$$

c) $y = \operatorname{sh} t \geq t$.

Réponse. $y' \geq 1$ et $y(t) \geq t$ sur $[0,+\infty[$; pour $q = 1$, $y = \operatorname{sh} t$.

Correction de l'exercice 8 – D'une équation intégrale à une équation différentielle

a) $\int_0^t (t-s)f(s)\,\mathrm{d}s = t\int_0^t f - \int_0^t sf(s)\,\mathrm{d}s$ est C^1, de dérivée $\int_0^t f + tf(t) - tf(t) = \int_0^t f$; donc f est C^1, puis C^2 avec

$$f'(t) = \int_0^t f, \qquad f''(t) = f(t)$$

et $f(0) = 1$, $f'(0) = 0$.

b) $f = \operatorname{ch} t$.

c) $f'' = f$, $f(0) = 0$, $f'(0) = 1 + 0$: $f = \operatorname{sh} t$.

Réponse. $f'' = f$ avec $f(0) = 1$, $f'(0) = 0$: $f = \operatorname{ch}$; second cas $f = \operatorname{sh}$.

Correction de l'exercice 9 – Équation fonctionnelle de d'Alembert

a) $y = 0$: $2f(x) = 2f(x)f(0)$, et $f \neq 0$ impose $f(0) = 1$. $x = 0$: $f(y) + f(-y) = 2f(y)$, donc $f(-y) = f(y)$.

b) Deux dérivations en y : $f''(x+y) + f''(x-y) = 2f(x)f''(y)$, puis $y = 0$:

$$f''(x) = f''(0)f(x)$$

c) Avec $f(0) = 1$, $f'(0) = 0$ (parité) : $k = -\omega^2 < 0$ donne $f = \cos(\omega x)$; $k = 0$ donne $f = 1$; $k = \omega^2 > 0$ donne $f = \operatorname{ch}(\omega x)$. Ces fonctions conviennent (formules d'addition).

Réponse. $f'' = f''(0)f$, $f(0) = 1$, $f'(0) = 0$: $f = \cos \omega x$, 1 ou $\operatorname{ch} \omega x$.

Correction de l'exercice 10 – Circuit électrique RLC

a) $q_p = CE$; les solutions homogènes tendent vers 0 (racines de partie réelle $-\frac{R}{2L} < 0$), donc $q \to CE$.

b) $Lr^2 + Rr + \frac{1}{C} = 0$ a pour discriminant $R^2 - \frac{4L}{C}$: positif, régime apériodique (deux exponentielles décroissantes) ; négatif, pseudo-périodique ; nul, critique.

c) Racine double $r = -\frac{R}{2L} = -\frac{1}{\sqrt{LC}}$; $q = CE + (A + Bt)\mathrm{e}^{rt}$, avec $A = -CE$ et $B + rA = 0$, d'où

$$q(t) = CE\left(1 - (1 - rt)\mathrm{e}^{rt}\right), \quad r = -\frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Réponse. $q \to CE$; régimes selon $R^2 - \frac{4L}{C}$; critique : $q = CE(1 - (1 - rt)\mathrm{e}^{rt})$, $r = -\frac{1}{\sqrt{LC}}$.

Correction de l'exercice 11 – Équation d'Euler avec second membre

a) $r(r-1) + r - 1 = r^2 - 1 = 0$: $y_h = At + \frac{B}{t}$.

b) $a(2 + 2 - 1)t^2 = 3at^2 = t^2$, $a = \frac{1}{3}$.

c) $y = At + \frac{B}{t} + \frac{t^2}{3}$: $A + B + \frac{1}{3} = 0$ et $A - B + \frac{2}{3} = 0$, d'où $A = -\frac{1}{2}$, $B = \frac{1}{6}$:

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$$y = -\frac{t}{2} + \frac{1}{6t} + \frac{t^2}{3}$$

Réponse. $y = At + \frac{B}{t} + \frac{t^2}{3}$; avec les conditions : $-\frac{t}{2} + \frac{1}{6t} + \frac{t^2}{3}$.

Correction de l'exercice 12 – Solutions périodiques d'un oscillateur forcé

a) Si $y(2\pi) = y(0)$, $y'(2\pi) = y'(0)$, alors $t \mapsto y(t + 2\pi)$ est solution (car f est périodique) avec les mêmes conditions en 0 : égale à y par unicité.

b) Toute solution est $y_0 + A\cos t + B\sin t$, et la partie homogène est périodique. Donc il faut et il suffit que y_0 vérifie a) :

$$y_0(2\pi) = -\int_0^{2\pi} \sin s\, f(s)\,\mathrm{d}s, \qquad y_0'(2\pi) = \int_0^{2\pi} \cos s\, f(s)\,\mathrm{d}s$$

doivent être nuls ($y_0(0) = y_0'(0) = 0$). Toutes les solutions sont alors périodiques.

c) $\cos 2t$: orthogonal à cos et sin, solutions périodiques ($y = -\frac{\cos 2t}{3} + \cdots$). $\cos t$: $\int \cos^2 = \pi \neq 0$, aucune solution périodique (résonance $\frac{t}{2}\sin t$).

Réponse. Solution périodique ssi $\int_0^{2\pi} f\cos = \int_0^{2\pi} f\sin = 0$; oui pour $\cos 2t$, non pour $\cos t$.

Correction de l'exercice 13 – L'unique solution bornée de y'' − y = f

a) $\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-|t-s|}\,\mathrm{d}s = 2$, d'où $|y| \leq \|f\|_\infty$.

b) En dérivant : $y' = -\frac{1}{2}\left(-\mathrm{e}^{-t}\int_{-\infty}^{t} \mathrm{e}^{s} f + f(t) + \mathrm{e}^{t}\int_{t}^{+\infty} \mathrm{e}^{-s} f - f(t)\right)$, puis

$$y'' = -\frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{-t}\int_{-\infty}^{t} \mathrm{e}^{s} f - f(t) + \mathrm{e}^{t}\int_{t}^{+\infty} \mathrm{e}^{-s} f - f(t)\right) = y + f$$

c) La différence de deux solutions bornées est une solution bornée de $y'' - y = 0$, de la forme $A\mathrm{e}^{t} + B\mathrm{e}^{-t}$, bornée sur $\mathbb{R}$ seulement si $A = B = 0$.

Réponse. $y = -\frac{1}{2}\int \mathrm{e}^{-|t-s|} f(s)\,\mathrm{d}s$ est l'unique solution bornée, avec $|y| \leq \|f\|_\infty$.

Correction de l'exercice 14 – La fonction de Bessel a une infinité de zéros

a) $y = ut^{-1/2}$: $y' = u't^{-1/2} - \frac{1}{2}ut^{-3/2}$, $y'' = u''t^{-1/2} - u't^{-3/2} + \frac{3}{4}ut^{-5/2}$, d'où

$$y'' + \frac{1}{t}y' + y = t^{-1/2}\left(u'' + \left(1 + \frac{1}{4t^2}\right)u\right)$$

b) $q(t) = 1 + \frac{1}{4t^2} \geq 1$: tout segment de longueur π contient un zéro de u, donc de y.

c) $[1, 100]$ contient 31 segments disjoints de longueur π ($31\pi \approx 97{,}4 \leq 99$) : au moins 31 zéros (et les zéros de J_0 sont asymptotiquement espacés de π).

Réponse. $u = \sqrt{t}\,y$ vérifie $u'' + (1 + \frac{1}{4t^2})u = 0$: un zéro par segment de longueur π, au moins 31 dans $[1, 100]$.

Correction de l'exercice 15 – Synthèse : fonction de Green d'un problème aux limites

a) La différence d vérifie $d'' = 0$, $d(0) = d(1) = 0$: d est affine, nulle.

b) $y(t) = (1-t)\int_0^t s f(s)\,\mathrm{d}s + t\int_t^1 (1-s) f(s)\,\mathrm{d}s$. Alors

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$y' = -\int_0^t sf + (1-t)tf(t) + \int_t^1 (1-s)f - t(1-t)f(t) = -\int_0^t sf + \int_t^1 (1-s)f$, puis

$$y'' = -tf(t) - (1-t)f(t) = -f(t)$$

et $y(0) = y(1) = 0$.

c) $f = 1$: $y = (1-t)\frac{t^2}{2} + t\frac{(1-t)^2}{2} = \frac{t(1-t)}{2}$.

d) $G \geq 0$, donc $f \geq 0 \Rightarrow y \geq 0$. Et $|y(t)| \leq \|f\|_\infty \int_0^1 G(t,s)\,\mathrm{d}s = \|f\|_\infty \frac{t(1-t)}{2} \leq \frac{\|f\|_\infty}{8}$.

Réponse. $y = \int_0^1 G(t,s)f(s)\,\mathrm{d}s$; pour $f = 1$, $y = \frac{t(1-t)}{2}$; $G \geq 0$ donne $y \geq 0$ et $|y| \leq \frac{1}{8}\|f\|_\infty$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).