Plaquette 3 – Systèmes différentiels linéaires : résolution et portraits de phase

Équations différentielles linéaires — Prépa MP / MPI (2e année)

Corrections détaillées

Boîte à outils

Cauchy-Lipschitz linéaire. Pour $A : I \to M_n(\mathbb{K})$ et $B : I \to \mathbb{K}^n$ continues, le problème $X' = A(t)X + B(t)$, $X(t_0) = X_0$ a une unique solution sur I ; les solutions homogènes forment un espace de dimension n.

Liouville. Le wronskien $W = \det(X_1, \dots, X_n)$ d'une famille de solutions homogènes vérifie $W' = \operatorname{tr}(A(t))W$, soit

$$W(t) = W(t_0)\exp\left(\int_{t_0}^{t} \operatorname{tr} A(s)\,\mathrm{d}s\right)$$

Dimension 2, A réelle constante ($\tau = \operatorname{tr} A$, $\delta = \det A$) :

— $\delta < 0$: col ; $\delta > 0$ et $\tau^2 > 4\delta$: nœud ;
— $\delta > 0$, $\tau^2 < 4\delta$, $\tau \neq 0$: foyer ; $\delta > 0$ et $\tau = 0$: centre ;
— stabilité asymptotique (toutes les solutions tendent vers 0) $\Leftrightarrow \tau < 0$ et $\delta > 0$.

Correction de l'exercice 1 – Un système de taille trois diagonalisable

a) $A = I + U$ où U est la matrice remplie de 1 ($U^2 = 3U$) : valeurs propres 4 (vecteur $(1,1,1)$) et 1 (double, plan $x + y + z = 0$).

b) $X(t) = \alpha \mathrm{e}^{4t}(1,1,1) + \mathrm{e}^{t}Q$ avec Q dans le plan $x + y + z = 0$ (deux paramètres).

c) On décompose $(1,0,0) = \frac{1}{3}(1,1,1) + \left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right)$, d'où

$$X(t) = \frac{\mathrm{e}^{4t}}{3}(1,1,1) + \mathrm{e}^{t}\left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right)$$

Réponse. $X(t) = \frac{\mathrm{e}^{4t}}{3}(1,1,1) + \frac{\mathrm{e}^{t}}{3}(2,-1,-1)$.

Correction de l'exercice 2 – Équation d'ordre trois et matrice compagnon

a) $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & -5 & 4 \end{pmatrix}$.

b) Le polynôme caractéristique de la matrice compagnon est $\lambda^3 - 4\lambda^2 + 5\lambda - 2$, qui s'annule en 1 ; la division donne $(\lambda - 1)(\lambda^2 - 3\lambda + 2) = (\lambda - 1)^2(\lambda - 2)$.

c) $y = (a + bt)\mathrm{e}^{t} + c\mathrm{e}^{2t}$. Conditions : $a + c = 0$, $a + b + 2c = 0$, $a + 2b + 4c = 1$; d'où $c = 1$, $a = -1$, $b = -1$:

$$y(t) = \mathrm{e}^{2t} - (1 + t)\mathrm{e}^{t}$$

Réponse. $y = (a + bt)\mathrm{e}^{t} + c\mathrm{e}^{2t}$; avec les conditions : $\mathrm{e}^{2t} - (1 + t)\mathrm{e}^{t}$.

Correction de l'exercice 3 – Valeurs propres complexes conjuguées

a) $\operatorname{tr} A = 4$, $\det A = 5$: $\lambda^2 - 4\lambda + 5 = 0$, $\lambda = 2 \pm i$. La seconde ligne de $A - (2 + i)I$ donne $v_1 + (1 - i)v_2 = 0$: $v = (-1 + i, 1)$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

b) $\mathrm{e}^{(2+i)t}v = \mathrm{e}^{2t}((-\cos t - \sin t) + i(\cos t - \sin t), \cos t + i\sin t)$, d'où

$$X_1 = \mathrm{e}^{2t}(-\cos t - \sin t, \cos t), \qquad X_2 = \mathrm{e}^{2t}(\cos t - \sin t, \sin t)$$

c) $\delta = 5 > 0$, $\tau^2 = 16 < 20$, $\tau > 0$: foyer instable ; les trajectoires sont des spirales qui s'éloignent de l'origine (facteur e^{2t}).

Réponse. $\lambda = 2 \pm i$; base $\mathrm{e}^{2t}(-\cos t - \sin t, \cos t)$, $\mathrm{e}^{2t}(\cos t - \sin t, \sin t)$: foyer instable.

Correction de l'exercice 4 – Classification des portraits de phase

a) $\delta = 1 - 4 = -3 < 0$: col (valeurs propres 3 et -1), instable.

b) $\tau = -6$, $\delta = 8$, $\tau^2 = 36 > 32$: nœud (valeurs propres -2 et -4), asymptotiquement stable.

c) Première : $\tau = 0$, $\delta = 4$: centre (valeurs propres $\pm 2i$), trajectoires fermées (ellipses), stable mais non asymptotiquement. Seconde :

$$\tau = -2, \quad \delta = 1 + 4 = 5, \quad \tau^2 = 4 < 20$$

foyer stable (valeurs propres $-1 \pm 2i$), spirales convergeant vers 0.

Réponse. a) col ; b) nœud stable ; c) centre, puis foyer stable.

Correction de l'exercice 5 – Décroissance exponentielle de la norme

a) $A = -I + aJ'$ avec $J' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ antisymétrique, donc $\langle AX, X\rangle = -\|X\|^2$ et $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|X\|^2 = -2\|X\|^2$.

b) $\|X(t)\|^2 = \mathrm{e}^{-2t}\|X(0)\|^2$.

c) $-I$ et aJ' commutent : $\exp(tA) = \mathrm{e}^{-t}\begin{pmatrix} \cos at & \sin at \\ -\sin at & \cos at \end{pmatrix}$, et

$$X(t) = \mathrm{e}^{-t}R_{-at}X(0)$$

Si $a \neq 0$: spirales logarithmiques convergeant vers 0 (foyer stable) ; si $a = 0$: demi-droites (nœud propre).

Réponse. $\|X(t)\| = \mathrm{e}^{-t}\|X(0)\|$; $X(t) = \mathrm{e}^{-t}R_{-at}X(0)$: spirales ($a \neq 0$) ou demi-droites.

Correction de l'exercice 6 – Intégrale première et période

a) $E' = 8xx' + 2yy' = 8xy - 8xy = 0$.

b) $4x^2 + y^2 = E(0)$: ellipse de demi-axes $\frac{\sqrt{E}}{2}$ et $\sqrt{E}$. Avec $x'' = -4x$: $x = \cos 2t$, $y = x' = -2\sin 2t$; on vérifie $4\cos^2 2t + 4\sin^2 2t = 4 = E(0)$.

c) Période $\frac{2\pi}{2} = \pi$:

$$x(t + \pi) = \cos(2t + 2\pi) = x(t)$$

Réponse. $4x^2 + y^2$ conservée : ellipses ; $x = \cos 2t$, $y = -2\sin 2t$, période π.

Correction de l'exercice 7 – Wronskien d'un système à coefficients variables

a) $(t^2)'' = 2 = \frac{2}{t^2}t^2$; $\left(\frac{1}{t}\right)'' = \frac{2}{t^3} = \frac{2}{t^2}\cdot\frac{1}{t}$.

b) $X_1 = (t^2, 2t)$, $X_2 = \left(\frac{1}{t}, -\frac{1}{t^2}\right)$, et

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$$W(t) = \det\begin{pmatrix} t^2 & \frac{1}{t} \\ 2t & -\frac{1}{t^2} \end{pmatrix} = -1 - 2 = -3$$

non nul : c'est une base des solutions.

c) $\mathrm{tr}A(t) = 0$, donc $W' = 0$ et W est constant, conformément au calcul.

Réponse. Matrice fondamentale $\begin{pmatrix} t^2 & 1/t \\ 2t & -1/t^2 \end{pmatrix}$, de déterminant -3 (constant car $\mathrm{tr}A = 0$).

Correction de l'exercice 8 – Système triangulaire à coefficients variables

a) $y = Ct$.

b) $x' - \frac{x}{t} = Ct$, soit $\left(\frac{x}{t}\right)' = C$: $x = Ct^2 + Dt$.

c) Matrice fondamentale $\begin{pmatrix} t^2 & t \\ t & 0 \end{pmatrix}$ ($C = 1, D = 0$ puis $C = 0, D = 1$), de déterminant $-t^2$. Et $\mathrm{tr}A(t) = \frac{2}{t}$:

$$W' = -2t = \frac{2}{t} \cdot (-t^2) \ \checkmark$$

Réponse. $y = Ct$, $x = Ct^2 + Dt$; $W = -t^2$ vérifie $W' = \frac{2}{t}W$.

Correction de l'exercice 9 – Variation des constantes pour un système

a) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = (0, t)$, $\exp(uA) = \begin{pmatrix} \cos u & \sin u \\ -\sin u & \cos u \end{pmatrix}$.

b) $\exp((t-s)A)B(s) = s(\sin(t-s), \cos(t-s))$, et par parties

$$\int_0^t s\sin(t-s)\,\mathrm{d}s = t - \sin t, \qquad \int_0^t s\cos(t-s)\,\mathrm{d}s = 1 - \cos t$$

donc $X(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t)$.

c) $x'' + x = t$: $x = t + A\cos t + B\sin t$, et $x(0) = 0$, $x'(0) = 0$ donnent $A = 0$, $B = -1$ ✓.

Réponse. $X(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t)$.

Correction de l'exercice 10 – Deux oscillateurs couplés

a) $u'' = -x - y = -u$ et $v'' = -3x + 3y = -3v$.

b) $u = a\cos t + b\sin t$, $v = c\cos(\sqrt{3}t) + d\sin(\sqrt{3}t)$, puis $x = \frac{u+v}{2}$, $y = \frac{u-v}{2}$. Pulsations propres 1 (mode en phase) et $\sqrt{3}$ (mode en opposition).

c) $u(0) = v(0) = 1$, $u'(0) = v'(0) = 0$:

$$x = \frac{\cos t + \cos\sqrt{3}t}{2}, \qquad y = \frac{\cos t - \cos\sqrt{3}t}{2}$$

superposition des deux modes ; l'énergie passe d'un oscillateur à l'autre (battements), sans périodicité exacte ($\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$).

Réponse. Modes $u = x + y$ (pulsation 1) et $v = x - y$ (pulsation $\sqrt{3}$) ; $x = \frac{\cos t + \cos\sqrt{3}t}{2}$.

Correction de l'exercice 11 – Majoration exponentielle des solutions

a) $A = PDP^{-1}$ et $\exp(tA) = P\,\mathrm{diag}(\mathrm{e}^{\lambda_j t})P^{-1}$, avec $|\mathrm{e}^{\lambda_j t}| = \mathrm{e}^{\mathrm{Re}\lambda_j t} \leq \mathrm{e}^{\alpha t}$; pour une norme d'algèbre, $C = \|P\|\|P^{-1}\|$ (avec la norme sup sur les diagonales) convient.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

b) $\|X(t)\| \le Ce^{\alpha t}\|X(0)\| \to 0$.

c) $\exp(tA) = e^{-t}\begin{pmatrix}1 & t\\ 0 & 1\end{pmatrix}$: la norme se comporte comme te^{-t}, et

$$\|\exp(tA)\| \le C_\varepsilon e^{(-1+\varepsilon)t} \quad \text{pour tout } \varepsilon > 0$$

mais pas avec $\varepsilon = 0$: un facteur polynomial apparaît.

Réponse. $\|\exp(tA)\| \le Ce^{\alpha t}$ (diagonalisable) ; pour un bloc de Jordan, facteur t en plus.

Correction de l'exercice 12 – Solutions bornées sur la droite

a) Dans une base de vecteurs propres complexes, les solutions sont $\sum c_j e^{\lambda_j t} v_j$. Le terme $e^{\lambda_j t}$ est borné sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $\mathrm{Re}\lambda_j = 0$. Une solution non nulle bornée exige donc un λ_j imaginaire pur, et réciproquement $e^{\lambda_j t}v_j$ (ou sa partie réelle) convient.

b) Toutes bornées $\Leftrightarrow$ chaque terme borné $\Leftrightarrow \mathrm{Re}\lambda_j = 0$ pour tout j.

c) Valeurs propres $\pm i$ et 1 : solutions bornées non nulles (dans le plan (e_1, e_2), rotations), mais pas toutes :

$$X(t) = e^t e_3 \text{ n'est pas bornée}$$

Réponse. Solution bornée non nulle $\Leftrightarrow$ valeur propre imaginaire pure ; toutes bornées $\Leftrightarrow$ spectre imaginaire pur.

Correction de l'exercice 13 – Une droite d'équilibres

a) $AX = 0 \Leftrightarrow x + y = 0$: toute la droite $x + y = 0$ est formée d'équilibres ($\det A = 0$).

b) Valeurs propres 0 (vecteur $(1,-1)$) et 2 (vecteur $(1,1)$) :

$$X(t) = \alpha(1,-1) + \beta e^{2t}(1,1)$$

c) Les trajectoires sont des demi-droites parallèles à $(1,1)$, issues de la droite d'équilibres et s'en éloignant (si $\beta \neq 0$).

Réponse. Équilibres : $x + y = 0$; $X = \alpha(1,-1) + \beta e^{2t}(1,1)$: demi-droites parallèles à $(1,1)$.

Correction de l'exercice 14 – Élimination d'une inconnue

a) $y = x' - x$, donc $y' = x'' - x' = 4x + y = 4x + x' - x$, soit

$$x'' - 2x' - 3x = 0$$

b) $r^2 - 2r - 3 = (r-3)(r+1)$: $x = ae^{3t} + be^{-t}$, puis $y = x' - x = 2ae^{3t} - 2be^{-t}$.

c) $\chi_A = (\lambda - 1)^2 - 4 = (\lambda - 3)(\lambda + 1)$: mêmes racines, vecteurs propres $(1,2)$ pour 3 et $(1,-2)$ pour -1, conformes à b).

Réponse. $x'' - 2x' - 3x = 0$; $x = ae^{3t} + be^{-t}$, $y = 2ae^{3t} - 2be^{-t}$.

Correction de l'exercice 15 – Synthèse : un modèle à deux compartiments

a) $x = x_0 e^{-at}$.

b) $y' + by = ax_0 e^{-at}$: solution particulière $\frac{ax_0}{b-a}e^{-at}$, et $y = \frac{ax_0}{b-a}e^{-at} + Ce^{-bt}$ avec $y(0) = 0$:

$$y(t) = \frac{ax_0}{b-a}\left(e^{-at} - e^{-bt}\right)$$

c) $y'(t) = 0 \Leftrightarrow ae^{-at} = be^{-bt} \Leftrightarrow t^* = \frac{\ln a - \ln b}{a - b}$ (> 0 dans les deux cas $a < b$ et $a > b$).

d) $a = b$: $y' + ay = ax_0 e^{-at}$ (résonance), $y = ax_0 te^{-at}$, maximale en $t^* = \frac{1}{a}$ (limite de c)

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

quand $b \to a$).

Réponse. $x = x_0 \mathrm{e}^{-at}$, $y = \dfrac{a x_0}{b-a}(\mathrm{e}^{-at} - \mathrm{e}^{-bt})$, maximum en $t^* = \dfrac{\ln(a/b)}{a-b}$; si $a = b$: $y = a x_0 t \mathrm{e}^{-at}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).