Plaquette 1 – Systèmes différentiels, wronskien et variation des constantes

Équations différentielles linéaires — Prépa MP / MPI (2e année)

Corrections détaillées

Boîte à outils

Système linéaire. $X'(t) = A(t)X(t) + B(t)$, avec A et B continues sur un intervalle I.

— **Théorème de Cauchy linéaire** : pour tout (t_0, X_0), il existe une **unique** solution sur I **tout entier** vérifiant $X(t_0) = X_0$.

— L'ensemble des solutions de l'équation **homogène** est un espace vectoriel de **dimension** n.

— **Structure affine** : solution générale = solution générale homogène + une solution particulière.

Coefficients constants. Pour $X' = AX$:

$$X(t) = \exp\left((t - t_0)A\right)X(t_0)$$

— Si A est **diagonalisable**, $A = PDP^{-1}$: en posant $Y = P^{-1}X$, le système se découple en $y_i' = \lambda_i y_i$.

— Une valeur propre λ **double non diagonalisable** produit des solutions en $te^{\lambda t}$.

— **Valeurs propres complexes** $\alpha \pm i\beta$: solutions réelles en $e^{\alpha t}\cos\beta t$ et $e^{\alpha t}\sin\beta t$.

Ordre 2 scalaire $y'' + a(t)y' + b(t)y = c(t)$, ramené au système $\begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b & -a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ c \end{pmatrix}$.

— **Wronskien** de deux solutions : $W = y_1 y_2' - y_2 y_1'$. Il vérifie $W' = -aW$, donc

$$W(t) = W(t_0)\exp\left(-\int_{t_0}^{t} a\right)$$

— W est **identiquement nul** ou **jamais nul** ; (y_1, y_2) est une base des solutions $\Leftrightarrow W \neq 0$.

— **Variation des constantes** : on cherche $y = \lambda(t)y_1 + \mu(t)y_2$ avec

$$\lambda' y_1 + \mu' y_2 = 0, \qquad \lambda' y_1' + \mu' y_2' = c$$

— **Réduction d'ordre** : si y_1 est une solution connue **ne s'annulant pas**, poser $y = y_1 z$ ramène à une équation d'ordre 1 en z'.

Correction de l'exercice 1 – Système diagonalisable

— **Matrice** : $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, de trace 7 et déterminant 10, donc $\chi_A = (X-2)(X-5)$.

— **Vecteurs propres** : $E_2 = \mathrm{Vect}(1, -1)$ et $E_5 = \mathrm{Vect}(2, 1)$ (calculés au chapitre de réduction).

— **Solution générale** :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda e^{2t}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu e^{5t}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

— Soit $x(t) = \lambda e^{2t} + 2\mu e^{5t}$ et $y(t) = -\lambda e^{2t} + \mu e^{5t}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

— **Vérification** : $x' = 2\lambda e^{2t} + 10\mu e^{5t}$; et $4x + 2y = 4\lambda e^{2t} + 8\mu e^{5t} - 2\lambda e^{2t} + 2\mu e^{5t} = 2\lambda e^{2t} + 10\mu e^{5t}$ ✓

— **Comportement** : si $\mu \neq 0$, la trajectoire s'aligne asymptotiquement sur la direction propre $(2, 1)$, associée à la plus grande valeur propre.

Réponse. $X(t) = \lambda e^{2t}(1, -1) + \mu e^{5t}(2, 1)$.

Correction de l'exercice 2 – Valeurs propres complexes

— **Matrice** : $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, de polynôme caractéristique $X^2 + 1$, de racines $\pm i$.

— **Solutions réelles** : avec $\alpha = 0$ et $\beta = 1$, elles s'écrivent comme combinaisons de $\cos t$ et $\sin t$.

— **Par l'exponentielle** : $\exp(tA) = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}$, donc

$$X(t) = \exp(tA)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$$

— **Vérification** : $x' = -\sin t = -y$ ✓ et $y' = \cos t = x$ ✓

— **Trajectoire** : le **cercle unité** parcouru dans le sens direct.

— **Invariant** : $x^2 + y^2$ est constante, car $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(x^2 + y^2\right) = 2xx' + 2yy' = -2xy + 2yx = 0$ ✓

Réponse. $x = \cos t$, $y = \sin t$.

Correction de l'exercice 3 – Système non diagonalisable

— **Dunford** : $A = 3I + N$ avec $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ nilpotente, commutant avec $3I$.

— **Exponentielle** : $\exp(tA) = e^{3t}(I + tN) = e^{3t}\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

— **Solution** :

$$X(t) = e^{3t}\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = e^{3t}\begin{pmatrix} 1 + 2t \\ 2 \end{pmatrix}$$

— **Vérification** : $x(t) = (1 + 2t)e^{3t}$, donc $x' = (2 + 3 + 6t)e^{3t} = (5 + 6t)e^{3t}$; et $3x + y = (3 + 6t)e^{3t} + 2e^{3t} = (5 + 6t)e^{3t}$ ✓

— **Signature de Jordan** : le terme en te^{3t} n'apparaîtrait pas si A était diagonalisable — c'est la trace du bloc non diagonal.

Réponse. $X(t) = e^{3t}((1 + 2t), 2)$.

Correction de l'exercice 4 – Wronskien

— **Calcul** :

$$W = y_1 y_2' - y_2 y_1' = e^{t}\left(-e^{-t}\right) - e^{-t}e^{t} = -1 - 1 = -2$$

— $W = -2 \neq 0$: la famille (y_1, y_2) est **libre**, donc une **base** de l'espace des solutions (de dimension 2).

— **Solution générale** : $y = \lambda e^{t} + \mu e^{-t}$.

— **Cohérence avec la formule** : ici $a = 0$ (pas de terme en y'), donc $W' = -aW = 0$ — le wronskien est bien **constant** ✓

— **Usage** : le wronskien est le test de liberté de deux solutions ; il évite d'avoir à résoudre un système.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Réponse. $W = -2 \neq 0$: $(\mathrm{e}^{t}, \mathrm{e}^{-t})$ est une base des solutions.

Correction de l'exercice 5 – Variation des constantes

Homogène : $y_h = \lambda \mathrm{e}^{t} + \mu \mathrm{e}^{-t}$.

Particulière : le second membre e^{t} correspond à une **racine** de l'équation caractéristique ($r = 1$) — il y a **résonance**, on cherche $y_p = kt\mathrm{e}^{t}$.

— $y_p' = k(1+t)\mathrm{e}^{t}$ et $y_p'' = k(2+t)\mathrm{e}^{t}$.

— $y_p'' - y_p = k(2+t-t)\mathrm{e}^{t} = 2k\mathrm{e}^{t} = \mathrm{e}^{t}$, donc $k = \dfrac{1}{2}$.

— **Solution générale** : $y = \dfrac{t\mathrm{e}^{t}}{2} + \lambda \mathrm{e}^{t} + \mu \mathrm{e}^{-t}$.

— **Contrôle** par variation des constantes : le système $\lambda' \mathrm{e}^{t} + \mu' \mathrm{e}^{-t} = 0$, $\lambda' \mathrm{e}^{t} - \mu' \mathrm{e}^{-t} = \mathrm{e}^{t}$ donne $\lambda' = \dfrac{1}{2}$ et $\mu' = -\dfrac{\mathrm{e}^{2t}}{2}$, d'où $\lambda = \dfrac{t}{2}$ — même résultat ✓

— **Règle de la résonance** : si le second membre est e^{rt} avec r racine **simple**, on multiplie par t ; racine **double**, par t^2.

Réponse. $y = \dfrac{t\mathrm{e}^{t}}{2} + \lambda \mathrm{e}^{t} + \mu \mathrm{e}^{-t}$.

Correction de l'exercice 6 – Réduction d'ordre

Vérification : $y_1 = t$ donne $y_1' = 1$, $y_1'' = 0$, et $0 - 2t + 2t = 0$ ✓

Réduction d'ordre : on pose $y = tz(t)$.

— $y' = z + tz'$ et $y'' = 2z' + tz''$.

— En reportant : $t^2(2z' + tz'') - 2t(z + tz') + 2tz = t^3 z'' + 2t^2 z' - 2t^2 z' = t^3 z''$.

— L'équation devient $t^3 z'' = 0$, donc $z'' = 0$ sur $]0\,;+\infty[$.

— **Donc** $z = at + b$, et $y = t(at+b) = at^2 + bt$.

— **Seconde solution** : $y_2 = t^2$, indépendante de y_1.

— **Wronskien** : $W = t \cdot 2t - t^2 \cdot 1 = t^2 \neq 0$ sur $]0\,;+\infty[$ ✓ — la famille est bien une base.

— **Vérification directe** : $t^2 \cdot 2 - 2t \cdot 2t + 2t^2 = 2t^2 - 4t^2 + 2t^2 = 0$ ✓

— **Remarque** : l'équation est de type **Euler** ; le changement $t = \mathrm{e}^{s}$ la ramène à coefficients constants.

Réponse. $y_2 = t^2$; solution générale $at^2 + bt$.

Correction de l'exercice 7 – Problème de Cauchy

— **Équation caractéristique** : $r^2 + 4 = 0$, racines $\pm 2\mathrm{i}$.

— **Solution générale** : $y = \lambda \cos 2t + \mu \sin 2t$.

— **Conditions initiales** : $y(0) = \lambda = 1$; $y'(t) = -2\lambda \sin 2t + 2\mu \cos 2t$ donne $y'(0) = 2\mu = 2$, soit $\mu = 1$.

— **Solution** : $y(t) = \cos 2t + \sin 2t$.

— **Forme amplitude-phase** : $y(t) = \sqrt{2}\cos\left(2t - \dfrac{\pi}{4}\right)$, d'amplitude $\sqrt{2} \approx 1{,}414$ et de période π.

— **Unicité** : garantie par le théorème de Cauchy linéaire — c'est **la** solution.

— **Vérification** : $y'' = -4\cos 2t - 4\sin 2t = -4y$ ✓

Réponse. $y(t) = \cos 2t + \sin 2t = \sqrt{2}\cos\left(2t - \dfrac{\pi}{4}\right)$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l'exercice 8 – Système avec second membre

Le système est **découplé** : $x' = x + 1$ et $y' = 2y + 1$.

— **Première équation** : solution particulière constante $x_p = -1$ (car $0 = x_p + 1$) ; solution générale $x = \lambda e^t - 1$.

— **Seconde** : $y_p = -\frac{1}{2}$; solution générale $y = \mu e^{2t} - \frac{1}{2}$.

— **Solution générale** :

$$X(t) = \lambda e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu e^{2t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

— **Point d'équilibre** : $X_{\text{eq}} = -A^{-1}B = \left(-1, -\frac{1}{2}\right)$ ✓ — c'est la solution **constante**.

— **Stabilité** : les valeurs propres 1 et 2 sont **positives**, donc l'équilibre est **instable** : toute perturbation s'amplifie exponentiellement.

— **Vérification** : $x' = \lambda e^t$ et $x + 1 = \lambda e^t$ ✓

Réponse. $X(t) = \lambda e^t(1, 0) + \mu e^{2t}(0, 1) + \left(-1, -\frac{1}{2}\right)$.

Correction de l'exercice 9 – Équation à coefficients variables

On divise par t : $y' - \frac{y}{t} = t$.

— **Homogène** : $\frac{y'}{y} = \frac{1}{t}$ donne $y_h = Ct$.

— **Variation de la constante** : $y = C(t)t$, donc $y' = C't + C$ et

$$C't + C - C = C't = t \quad \Longrightarrow \quad C'(t) = 1$$

— Donc $C(t) = t + K$ et $y = t^2 + Kt$.

— **Vérification** : $ty' - y = t(2t + K) - t^2 - Kt = 2t^2 + Kt - t^2 - Kt = t^2$ ✓

— **Raccordement en** 0 : toutes ces solutions s'annulent en 0 ; sur $\mathbb{R}$ entier, la condition de dérivabilité impose la même constante K des deux côtés (le point $t = 0$ est **singulier**, le coefficient de y' s'y annulant).

— **Astuce** : $ty' - y = t^2\left(\frac{y}{t}\right)'$ — poser $u = \frac{y}{t}$ donne directement $u' = 1$.

Réponse. $y = t^2 + Kt$ sur $]0\,;+\infty[$.

Correction de l'exercice 10 – Comportement asymptotique

— **Solutions** : $x(t) = x_0 e^{-t}$ et $y(t) = y_0 e^{-2t}$.

— Les deux valeurs propres étant **strictement négatives**, $X(t) \to (0, 0)$ pour **toute** condition initiale.

— L'origine est un **point d'équilibre asymptotiquement stable** (puits).

— **Vitesse d'approche** : y tend vers 0 plus vite que x ; asymptotiquement, la trajectoire s'aplatit le long de l'axe des abscisses (direction propre **lente**, $\lambda = -1$).

— **Critère général** : pour $X' = AX$, l'origine est asymptotiquement stable $\Leftrightarrow$ **toutes** les valeurs propres ont une **partie réelle strictement négative**.

— **Contre-exemple** : avec $\text{diag}(-1, 1)$, l'origine serait un **point selle** — stable dans une direction, instable dans l'autre.

Réponse. $X(t) \to (0, 0)$: équilibre asymptotiquement stable.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l'exercice 11 – Formule de Liouville

— **Définition** : $W = y_1 y_2' - y_2 y_1'$.

— **Dérivation** :

$$W' = y_1' y_2' + y_1 y_2'' - y_2' y_1' - y_2 y_1'' = y_1 y_2'' - y_2 y_1''$$

— **Utilisation de l'équation** : $y_i'' = -a y_i' - b y_i$, donc

$$W' = y_1(-a y_2' - b y_2) - y_2(-a y_1' - b y_1) = -a(y_1 y_2' - y_2 y_1') = -aW$$

— Les termes en b se **compensent** exactement.

— **Conséquence (formule de Liouville)** :

$$W(t) = W(t_0) \exp\left(- \int_{t_0}^{t} a(s)\,\mathrm{d}s \right)$$

— L'exponentielle ne s'annulant jamais, W est soit **identiquement nul**, soit **partout non nul**.

— **Application** : il suffit de calculer W en **un seul point** pour savoir si deux solutions forment une base.

Réponse. $W' = y_1 y_2'' - y_2 y_1'' = -aW$ (les termes en b se compensent).

Correction de l'exercice 12 – Oscillateur amorti

— **Équation caractéristique** : $r^2 + 2r + 5 = 0$, $\Delta = -16$, racines $-1 \pm 2\mathrm{i}$.

— **Solution générale** : $y = \mathrm{e}^{-t}(\lambda \cos 2t + \mu \sin 2t)$.

— **Conditions** : $y(0) = \lambda = 1$.

— $y' = \mathrm{e}^{-t}(-\lambda \cos 2t - \mu \sin 2t - 2\lambda \sin 2t + 2\mu \cos 2t)$, donc $y'(0) = -\lambda + 2\mu = 0$, soit $\mu = \dfrac{1}{2}$.

— **Solution** : $y(t) = \mathrm{e}^{-t}\left(\cos 2t + \dfrac{1}{2}\sin 2t\right)$.

— **Régime** : **pseudo-périodique amorti** — oscillations de pseudo-période $\dfrac{2\pi}{2} = \pi$, d'amplitude décroissant en e^{-t}.

— **Décrément logarithmique** : l'amplitude est divisée par $\mathrm{e}^{\pi} \approx 23{,}1$ à chaque pseudo-période.

— **Vérification numérique** : $y(\pi) = \mathrm{e}^{-\pi}\left(\cos 2\pi + \frac{1}{2}\sin 2\pi\right) = \mathrm{e}^{-\pi} \approx 0{,}0432$ ✓

Réponse. $y = \mathrm{e}^{-t}\left(\cos 2t + \frac{1}{2}\sin 2t\right)$: régime pseudo-périodique amorti.

Correction de l'exercice 13 – Équation d'Euler

a) $z'(s) = \mathrm{e}^s y'(\mathrm{e}^s) = t y'$ et $z''(s) = t y' + t^2 y''$. Donc $t^2 y'' = z'' - z'$ et $t y' = z'$:

$$t^2 y'' - 3t y' + 4y = z'' - z' - 3z' + 4z = z'' - 4z' + 4z = 0$$

b) Équation caractéristique $(r-2)^2 = 0$: $z = (A + Bs)\mathrm{e}^{2s}$, soit $y(t) = t^2(A + B\ln t)$.

c) $y(1) = A = 1$; $y'(t) = 2t(A + B\ln t) + Bt$, $y'(1) = 2A + B = 0$, $B = -2$: $y = t^2(1 - 2\ln t)$.

Réponse. $y = t^2(A + B\ln t)$; avec les conditions : $y = t^2(1 - 2\ln t)$.

Correction de l'exercice 14 – Recollement en un point singulier

a) Sur chaque demi-droite, $y' = \dfrac{2}{t} y$: $y = \lambda t^2$.

b) Une solution sur $\mathbb{R}$ vaut $\lambda_1 t^2$ pour $t > 0$, $\lambda_2 t^2$ pour $t < 0$, et (par continuité) 0 en 0. Elle est dérivable en 0 de dérivée 0 quels que soient λ_1, λ_2, et vérifie l'équation en 0 (

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$0 - 0 = 0$). L'espace des solutions est

$$\left\{ t \mapsto \lambda_1 t^2 1_{t>0} + \lambda_2 t^2 1_{t<0} \right\}, \quad \text{de dimension 2}$$

c) Le théorème s'applique à $y' = a(t)y$ avec a continue ; ici le coefficient de y' s'annule en 0 : sous forme résolue $a(t) = \frac{2}{t}$ n'est pas défini en 0. Toutes les solutions passent par $(0, 0)$: il n'y a ni existence pour $y(0) \neq 0$, ni unicité pour $y(0) = 0$.

Réponse. Solutions sur $\mathbb{R}$: $\lambda_1 t^2$ ($t > 0$), $\lambda_2 t^2$ ($t < 0$) — espace de dimension 2 ; le coefficient de y' s'annule en 0.

Correction de l'exercice 15 – Synthèse : système couplé complet

— **Matrice homogène** : $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, de rang 1, de valeurs propres 0 et 2.

— **Vecteurs propres** : $E_0 = \text{Vect}(1, -1)$, $E_2 = \text{Vect}(1, 1)$.

— **Solution homogène** : $X_h = \lambda(1, -1) + \mu e^{2t}(1, 1)$.

Solution particulière. On pose $s = x + y$ et $d = x - y$.

— $s' = 2s + e^t$: solution particulière $s_p = ke^t$ avec $k - 2k = 1$, donc $k = -1$ et $s_p = -e^t$.

— $d' = e^t$: solution particulière $d_p = e^t$.

— **Retour** : $x_p = \dfrac{s_p + d_p}{2} = 0$ et $y_p = \dfrac{s_p - d_p}{2} = -e^t$.

— **Vérification** : ${x_p}' = 0$ et $x_p + y_p + e^t = 0 - e^t + e^t = 0$ ✓ ; ${y_p}' = -e^t$ et $x_p + y_p = -e^t$ ✓

— **Solution générale** :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -e^t \end{pmatrix}$$

— **Lecture** : la valeur propre nulle produit une solution **constante** ; le changement de variables s, d est exactement le passage à la base propre.

Réponse. $X = \lambda(1, -1) + \mu e^{2t}(1, 1) + \left(0,\ -e^t\right)$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).