Plaquette 4 – Coefficients variables : solutions développables en série entière et raccordements

Équations différentielles linéaires — Prépa MP / MPI (2e année)

Exercices

Méthode

Pour une équation à coefficients polynomiaux, on cherche les solutions **développables en série entière** : on injecte $y = \sum a_n t^n$, on obtient une **relation de récurrence** sur les coefficients, on la résout (souvent séparément pour les indices pairs et impairs), on calcule le **rayon** et l'on identifie parfois la somme. Quand le coefficient dominant s'annule en un point (point singulier), le théorème de Cauchy-Lipschitz ne s'applique pas sur un intervalle contenant ce point : on résout sur chaque intervalle où il ne s'annule pas, puis on étudie le **raccordement** (continuité, dérivabilité aux ordres requis), ce qui peut donner un espace de solutions de dimension inattendue, voire aucune solution développable.

Exercice 1 – Une solution qui est une exponentielle de carré

On considère $y'' - 2ty' - 2y = 0$.

a) Établir la récurrence $a_{n+2} = \dfrac{2a_n}{n+2}$ pour une solution $\sum a_n t^n$.

b) Déterminer la solution paire avec $a_0 = 1$ et l'identifier.

c) Donner les coefficients de la solution impaire avec $a_1 = 1$ et le rayon.

Exercice 2 – Une équation de Legendre

On considère $(1 - t^2)y'' - 2ty' + 2y = 0$ sur $]-1, 1[$.

a) Établir $a_{n+2} = \dfrac{n-1}{n+1} a_n$.

b) Déterminer la solution impaire, puis la solution paire avec $a_0 = 1$ et son rayon.

c) Identifier la solution paire à l'aide de $\operatorname{argth} t = \sum_{k \geq 0} \dfrac{t^{2k+1}}{2k+1}$.

Exercice 3 – Cosinus hyperbolique d'une racine

On considère $4ty'' + 2y' - y = 0$.

a) Établir $(2n+2)(2n+1)a_{n+1} = a_n$.

b) En déduire la solution développable avec $a_0 = 1$ et l'identifier pour $t > 0$.

c) Vérifier que $\operatorname{sh}\sqrt{t}$ est solution sur $]0, +\infty[$; est-elle développable en série entière en 0 ?

Exercice 4 – Raccordement à l'ordre deux

On considère $t^2 y'' - 2y = 0$.

a) Chercher des solutions t^r sur $]0, +\infty[$ et donner la solution générale.

b) Même question sur $]-\infty, 0[$ (avec $|t|^r$).

c) Déterminer les solutions deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 5 – Une série entière solution d'un problème de Cauchy

On considère $y' = ty + 1$, $y(0) = 0$.

a) Établir $(n+1)a_{n+1} = a_{n-1}$ pour $n \geq 1$, et $a_1 = 1$.

b) En déduire $a_{2k+1} = \dfrac{2^k k!}{(2k+1)!}$ et $a_{2k} = 0$, et le rayon.

c) Comparer avec la solution obtenue par variation de la constante.

Exercice 6 – Une équation exacte

On considère $(1+t^2)y'' + 4ty' + 2y = 0$.

a) Montrer que l'équation s'écrit $\Big((1+t^2)y\Big)'' = 0$.

b) En déduire toutes les solutions sur $\mathbb{R}$.

c) Retrouver par les séries entières la solution avec $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$, et son rayon.

Exercice 7 – Polynômes d'Hermite

Pour $n \in \mathbb{N}$, on considère $y'' - 2ty' + 2ny = 0$.

a) Établir $a_{k+2} = \dfrac{2(k-n)}{(k+2)(k+1)} a_k$.

b) Montrer qu'il existe une solution polynomiale de degré n.

c) Expliciter pour $n = 2$ et $n = 3$.

Exercice 8 – Aucune solution développable

On considère $t^2 y' - y = -t$.

a) Montrer qu'une solution $\sum a_n t^n$ vérifie $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ et $a_n = (n-1)a_{n-1}$.

b) En déduire le rayon de la série obtenue.

c) Conclure, et résoudre l'équation sur $]0, +\infty[$ (variation de la constante).

Exercice 9 – Fonction de Bessel d'indice un demi

On considère $t^2 y'' + ty' + \Big(t^2 - \dfrac{1}{4}\Big)y = 0$ sur $]0, +\infty[$.

a) Avec $y = \dfrac{z}{\sqrt{t}}$, montrer que $z'' + z = 0$.

b) En déduire les solutions.

c) Vérifier la formule de Liouville pour le wronskien de $\dfrac{\sin t}{\sqrt{t}}$ et $\dfrac{\cos t}{\sqrt{t}}$.

Exercice 10 – Équation de Tchebychev par changement de variable

On considère $(1-t^2)y'' - ty' + y = 0$ sur $]-1, 1[$.

a) Avec $t = \sin\theta$, $\theta \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$, et $z(\theta) = y(\sin\theta)$, montrer que $z'' + z = 0$.

b) En déduire les solutions y.

c) Lesquelles sont développables en série entière en 0 ? Avec quel rayon ?

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 11 – Abaisser l'ordre par une dérivée exacte

On considère $y'' + ty' + y = 0$.

a) Montrer que l'équation s'écrit $(y' + ty)' = 0$.

b) En déduire la solution générale.

c) Identifier la solution paire avec $y(0) = 1$, et donner son DSE.

Exercice 12 – Problème de Cauchy en un point singulier

On considère $ty' + y = \sin t$.

a) Résoudre sur $]0, +\infty[$ et sur $]-\infty, 0[$.

b) Montrer qu'il existe une unique solution sur $\mathbb{R}$, et qu'elle est développable en série entière.

c) Donner ses premiers termes.

Exercice 13 – L'équation d'Airy

On considère $y'' + ty = 0$.

a) Établir $a_2 = 0$ et $a_{n+3} = -\dfrac{a_n}{(n+3)(n+2)}$.

b) Écrire les premiers termes des solutions avec $(a_0, a_1) = (1, 0)$ et $(0, 1)$, et le rayon.

c) Montrer que toute solution non nulle a ses zéros isolés.

Exercice 14 – Zéros simultanés de deux solutions

Soient y_1, y_2 deux solutions de $y'' + a(t)y' + b(t)y = 0$ (a, b continues sur I).

a) Montrer que si y_1 et y_2 s'annulent en un même point, alors elles sont liées.

b) Montrer que si y_1 et y_2 ont un extremum en un même point, alors elles sont liées.

c) Application : peut-on trouver deux solutions indépendantes de $y'' + y = 0$ nulles en 0 ?

Exercice 15 – Synthèse : les polynômes de Legendre

Pour $n \in \mathbb{N}$, on considère $(1 - t^2)y'' - 2ty' + n(n+1)y = 0$ sur $]-1, 1[$.

a) Établir $a_{k+2} = \dfrac{k(k+1) - n(n+1)}{(k+1)(k+2)} a_k = \dfrac{(k-n)(k+n+1)}{(k+1)(k+2)} a_k$.

b) Montrer qu'il existe une solution polynomiale de degré n, de même parité que n.

c) Expliciter pour $n = 2$ et $n = 3$.

d) Montrer que la solution de parité opposée a un rayon égal à 1 (elle n'est pas polynomiale).

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).