# Plaquette 2 – Équations scalaires d'ordre 1 et 2 : variation des constantes et wronskien

## Équations différentielles linéaires — Prépa MP / MPI (2e année)

Exercices

### Méthode

Pour une équation linéaire, la solution générale est **solution homogène + solution particulière**. À l'ordre 1, $y' + a(t)y = b(t)$ se résout par $y_h = Ce^{-A(t)}$ puis **variation de la constante**. À l'ordre 2 à coefficients constants, l'équation caractéristique donne $y_h$, et l'on cherche une solution particulière de la forme du second membre (polynôme fois exponentielle, avec un facteur $t$ ou $t^2$ en cas de **résonance**). À coefficients variables, une solution connue $y_1$ en donne une seconde par la **formule de Liouville** $W' = -aW$ ou la réduction d'ordre $y = y_1 z$, et la variation des constantes donne une solution particulière.

### Exercice 1 – Ordre un avec second membre

a) Résoudre $y' + 2ty = t$ sur $\mathbb{R}$.

b) Résoudre $y' - y = \sin t$ sur $\mathbb{R}$ (solution particulière via $e^{it}$).

c) Déterminer la solution de b) vérifiant $y(0) = 0$.

### Exercice 2 – Variation de la constante à l'ordre un

a) Résoudre $(1 + t^2)y' + ty = 1$ sur $\mathbb{R}$.

b) Résoudre $(1 - t^2)y' - ty = 1$ sur $]-1, 1[$.

c) Quelles solutions de b) ont une limite finie en $1^-$ ?

### Exercice 3 – Résonance

a) Résoudre $y'' + y = \cos t$ (chercher $y_p = t(a\cos t + b\sin t)$).

b) Résoudre $y'' + y = \cos(\omega t)$ pour $\omega \neq \pm 1$.

c) Comparer les solutions nulles en 0 ainsi que leur dérivée, et interpréter quand $\omega \to 1$.

### Exercice 4 – Second membre polynôme fois exponentielle

Résoudre $y'' - 3y' + 2y = te^t$.

a) Déterminer les solutions homogènes.

b) Justifier la forme $y_p = (at^2 + bt)e^t$ et calculer $a$, $b$.

c) Donner la solution vérifiant $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.

### Exercice 5 – Seconde solution par le wronskien

On considère $y'' + \frac{1}{t}y' - \frac{1}{t^2}y = 0$ sur $]0, +\infty[$.

a) Vérifier que $y_1(t) = t$ est solution.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

b) Avec la formule de Liouville, calculer le wronskien $W$ d'une base, puis trouver $y_2$ telle que $\left(\frac{y_2}{y_1}\right)' = \frac{W}{y_1^2}$.

c) Résoudre $y'' + \frac{1}{t}y' - \frac{1}{t^2}y = 1$ par variation des constantes.

## Exercice 6 – Variation des constantes avec un second membre singulier

Résoudre $y'' + y = \frac{1}{\cos t}$ sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

a) Calculer le wronskien de $(\cos, \sin)$.

b) Établir $\lambda_1' = -\tan t$, $\lambda_2' = 1$, et en déduire une solution particulière.

c) Vérifier directement.

## Exercice 7 – Changement de fonction inconnue

On considère $y'' + 4ty' + (4t^2 + 2)y = 0$ sur $\mathbb{R}$.

a) Avec $y = \mathrm{e}^{-t^2} z$, montrer que $z'' = 0$.

b) En déduire les solutions.

c) Résoudre $y'' + 4ty' + (4t^2 + 2)y = \mathrm{e}^{-t^2}$.

## Exercice 8 – Recollement à l'ordre un

On considère $ty' + y = 2t$.

a) Résoudre sur $]0, +\infty[$ et sur $]-\infty, 0[$.

b) Déterminer les solutions définies et dérivables sur $\mathbb{R}$.

c) Même question pour $ty' - y = 0$.

## Exercice 9 – Comportement asymptotique d'une solution

On considère $y' + y = \frac{1}{1+t^2}$ sur $[0, +\infty[$.

a) Écrire la solution générale sous forme intégrale.

b) Montrer que toutes les solutions tendent vers 0 en $+\infty$.

c) Montrer que $\int_0^t \frac{\mathrm{e}^s}{1+s^2}\,\mathrm{d}s \sim \frac{\mathrm{e}^t}{t^2}$, et en déduire un équivalent commun des solutions.

## Exercice 10 – Solution périodique

On considère $y' + y = \cos t$.

a) Déterminer une solution particulière de la forme $a\cos t + b\sin t$.

b) Montrer que c'est l'unique solution $2\pi$-périodique.

c) Montrer que toute solution converge vers elle, exponentiellement vite.

## Exercice 11 – Second membre polynomial

Résoudre $y'' + y' - 2y = t^2$.

a) Déterminer les solutions homogènes.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

b) Chercher une solution particulière polynomiale de degré 2.

c) Quelles solutions vérifient $y(t) + \frac{t^2}{2} = O(t)$ en $+\infty$ ?

## Exercice 12 – Un problème aux limites

Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, on cherche les solutions non nulles de $y'' + \lambda y = 0$ avec $y(0) = y(\pi) = 0$.

a) Traiter les cas $\lambda < 0$ et $\lambda = 0$.

b) Pour $\lambda = \omega^2 > 0$, montrer qu'il existe une solution non nulle si et seulement si $\omega \in \mathbb{N}^*$.

c) Décrire les solutions pour $\lambda = n^2$ (modes propres de la corde vibrante).

## Exercice 13 – Abaissement de l'ordre

On considère $(1 + t^2)y'' - 2ty' + 2y = 0$ sur $\mathbb{R}$.

a) Chercher une solution polynomiale de degré 1.

b) Avec $y = tz$, trouver une seconde solution indépendante.

c) Donner la solution générale.

## Exercice 14 – Ordre un sur un intervalle ouvert

On considère $(1 - t^2)y' - 2ty = 2t$ sur $]-1, 1[$.

a) Résoudre l'équation homogène.

b) Trouver une solution particulière constante, et donner la solution générale.

c) Quelles solutions sont bornées sur $]-1, 1[$ ?

## Exercice 15 – Synthèse : solutions bornées d'un oscillateur forcé

Soit $f$ continue sur $[0, +\infty[$ et l'équation $y'' + y = f(t)$.

a) Par variation des constantes, montrer que $y_0(t) = \int_0^t \sin(t - s) f(s)\, ds$ est la solution nulle en 0 ainsi que sa dérivée.

b) Si $\int_0^{+\infty} |f| < +\infty$, montrer que toutes les solutions sont bornées sur $[0, +\infty[$.

c) Exemple : $f(t) = \frac{1}{1 + t^2}$ ; majorer $|y_0|$.

d) Montrer que pour $f = \cos$, la conclusion de b) tombe.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).