Plaquette 5 – Problèmes de synthèse : zéros des solutions, équations non linéaires réductibles et problèmes aux limites

Équations différentielles linéaires — Prépa MP / MPI (2e année)

Exercices

Méthode

Sans résoudre explicitement, on obtient des **informations qualitatives** sur les solutions de $y'' + q(t)y = 0$ par l'étude du **wronskien** (théorèmes de séparation et de comparaison de Sturm), de la **convexité** ($q \leq 0$) ou d'une **énergie** (oscillateur amorti). Certaines équations non linéaires se **ramènent** à des équations linéaires par changement d'inconnue (Bernoulli : $z = \frac{1}{y}$; Riccati : $y = y_1 + \frac{1}{z}$ avec y_1 solution connue). Enfin, on traduit une équation intégrale en équation différentielle, et l'on résout des **problèmes aux limites** par la variation des constantes (fonction de Green, alternative de Fredholm).

Exercice 1 – Théorème de séparation de Sturm

Soient y_1, y_2 deux solutions linéairement indépendantes de $y'' + q(t)y = 0$ (q continue), et $t_1 < t_2$ deux zéros consécutifs de y_1.

a) Montrer que $y_1'(t_1)$ et $y_1'(t_2)$ sont non nuls et de signes opposés.

b) En supposant que y_2 ne s'annule pas sur $[t_1, t_2]$, étudier le signe du wronskien en t_1 et en t_2, et aboutir à une contradiction.

c) Conclure, et illustrer avec cos et sin.

Exercice 2 – Théorème de comparaison de Sturm

Soit q continue avec $q(t) \geq \omega^2 > 0$, et y une solution non nulle de $y'' + q(t)y = 0$. On veut montrer que y s'annule sur tout segment $[a, b]$ de longueur $\frac{\pi}{\omega}$.

a) Soit $z(t) = \sin(\omega(t - a))$. Calculer la dérivée de $W = yz' - y'z$.

b) On suppose $y > 0$ sur $[a, b]$. Montrer que $W(a) > 0$, $W(b) < 0$ et W croissante : contradiction.

c) Application : les solutions de $y'' + (4 + \sin^2 t)y = 0$ ont une infinité de zéros, espacés d'au plus $\frac{\pi}{2}$.

Exercice 3 – Coefficient négatif : au plus un zéro

Soit q continue avec $q \leq 0$ sur I, et y une solution non nulle de $y'' + q(t)y = 0$.

a) On suppose que y s'annule en $t_1 < t_2$ et est > 0 sur $]t_1, t_2[$. Montrer que y est convexe sur $[t_1, t_2]$.

b) En déduire une contradiction, puis que y s'annule au plus une fois.

c) Exemple : $y'' - y = 0$.

Exercice 4 – Une équation de Bernoulli

On considère $y' + y = y^2$.

a) Pour une solution ne s'annulant pas, montrer que $z = \frac{1}{y}$ vérifie $z' - z = -1$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

b) En déduire les solutions.
c) Résoudre avec $y(0) = 2$ et déterminer l'intervalle maximal de définition.

Exercice 5 – Une équation de Riccati

On considère $y' = y^2 - \frac{2}{t^2}$ sur $]0, +\infty[$.

a) Chercher une solution de la forme $\frac{\lambda}{t}$.
b) Avec $y = \frac{1}{t} + \frac{1}{z}$, montrer que $z' = -\frac{2}{t}z - 1$.
c) En déduire les solutions.

Exercice 6 – Énergie d'un oscillateur amorti

Soit $y'' + 2\alpha y' + \omega^2 y = 0$ avec $\alpha, \omega > 0$, et $E = y'^2 + \omega^2 y^2$.

a) Montrer que $E' = -4\alpha y'^2 \leq 0$.
b) En utilisant les solutions explicites, montrer que $E(t) \to 0$ quand $t \to +\infty$ dans tous les régimes.
c) Dans le régime pseudo-périodique ($\alpha < \omega$), donner la pseudo-période et le taux de décroissance de E.

Exercice 7 – Croissance des solutions quand q est positif

Soit q continue et positive sur $[0, +\infty[$, et y la solution de $y'' = q(t)y$ avec $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

a) Soit $T = \sup\{t > 0 \mid y > 0 \text{ sur }]0, t]\}$. Montrer que $T > 0$.
b) Montrer que sur $]0, T[$, $y' \geq 1$ et $y(t) \geq t$, et en déduire $T = +\infty$.
c) Exemple : $q = 1$.

Exercice 8 – D'une équation intégrale à une équation différentielle

On cherche f continue sur $\mathbb{R}$ telle que $f(t) = 1 + \int_0^t (t - s)f(s)\,\mathrm{d}s$.

a) Montrer que f est de classe C^2 et que $f'' = f$, $f(0) = 1$, $f'(0) = 0$.
b) En déduire f.
c) Même question avec $f(t) = t + \int_0^t (t - s)f(s)\,\mathrm{d}s$.

Exercice 9 – Équation fonctionnelle de d'Alembert

On cherche $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^2, non nulle, telle que $f(x + y) + f(x - y) = 2f(x)f(y)$.

a) Montrer que $f(0) = 1$ et que f est paire.
b) En dérivant deux fois par rapport à y en $y = 0$, montrer que $f'' = kf$ avec $k = f''(0)$.
c) En déduire f selon le signe de k.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 10 – Circuit électrique RLC

La charge d'un condensateur vérifie $Lq'' + Rq' + \frac{q}{C} = E$ ($L, R, C, E > 0$ constantes).

a) Donner une solution particulière et la limite de $q(t)$ quand $t \to +\infty$.

b) Discuter les régimes selon le signe de $R^2 - \frac{4L}{C}$.

c) Pour $R = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$ (régime critique), résoudre avec $q(0) = 0$, $q'(0) = 0$.

Exercice 11 – Équation d'Euler avec second membre

On considère $t^2y'' + ty' - y = t^2$ sur $]0, +\infty[$.

a) Déterminer les solutions homogènes de la forme t^r.

b) Chercher une solution particulière at^2.

c) Résoudre avec $y(1) = 0$, $y'(1) = 0$.

Exercice 12 – Solutions périodiques d'un oscillateur forcé

Soit f continue 2π-périodique et l'équation $y'' + y = f$.

a) Montrer qu'une solution y est 2π-périodique si et seulement si $y(2\pi) = y(0)$ et $y'(2\pi) = y'(0)$.

b) Avec $y_0(t) = \int_0^t \sin(t-s) f(s)\,ds$, montrer qu'il existe une solution périodique si et seulement si $\int_0^{2\pi} f(s)\cos s\,ds = \int_0^{2\pi} f(s)\sin s\,ds = 0$.

c) Exemples : $f = \cos 2t$ et $f = \cos t$.

Exercice 13 – L'unique solution bornée de y'' − y = f

Soit f continue et bornée sur $\mathbb{R}$, et $y(t) = -\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|t-s|} f(s)\,ds$.

a) Montrer que y est bien définie et bornée par $\|f\|_\infty$.

b) En écrivant $y(t) = -\frac{1}{2}\left(e^{-t}\int_{-\infty}^{t} e^{s} f(s)\,ds + e^{t}\int_{t}^{+\infty} e^{-s} f(s)\,ds\right)$, vérifier que $y'' - y = f$.

c) Montrer que c'est l'unique solution bornée sur $\mathbb{R}$.

Exercice 14 – La fonction de Bessel a une infinité de zéros

On considère $y'' + \frac{1}{t}y' + y = 0$ sur $]0, +\infty[$ (dont J_0 est solution).

a) Avec $u = \sqrt{t}\,y$, montrer que $u'' + \left(1 + \frac{1}{4t^2}\right)u = 0$.

b) En déduire, avec le théorème de comparaison de Sturm, que toute solution non nulle s'annule sur tout segment de longueur π.

c) Combien J_0 a-t-elle de zéros dans $[1, 100]$, au moins ?

Exercice 15 – Synthèse : fonction de Green d'un problème aux limites

Soit f continue sur $[0, 1]$. On cherche y de classe C^2 avec $-y'' = f$, $y(0) = y(1) = 0$, et l'on pose $G(t, s) = s(1 - t)$ si $s \le t$, $G(t, s) = t(1 - s)$ si $s \ge t$.

a) Montrer l'unicité de la solution (étudier la différence de deux solutions).

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

b) Montrer que $y(t) = \int_0^1 G(t,s)f(s)\,\mathrm{d}s$ est solution (dériver deux fois en séparant $\int_0^t$ et $\int_t^1$).

c) Expliciter y pour $f = 1$.

d) En déduire que si $f \geq 0$, alors $y \geq 0$ (principe du maximum), et que $|y| \leq \frac{1}{8}\|f\|_\infty$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).