Plaquette 3 – Systèmes différentiels linéaires : résolution et portraits de phase

Équations différentielles linéaires — Prépa MP / MPI (2e année)

Exercices

Méthode

Pour résoudre $X' = AX$ (coefficients constants), on **réduit** A : si $A = PDP^{-1}$, les coordonnées $Y = P^{-1}X$ vérifient $Y' = DY$ (équations découplées) ; si une valeur propre est **complexe**, on prend parties réelle et imaginaire de $e^{\lambda t}v$; si A n'est pas diagonalisable, on trigonalise (ou on écrit $A = \lambda I + N$), ce qui fait apparaître des facteurs polynomiaux. Le **comportement qualitatif** en dimension 2 se lit sur la trace et le déterminant (nœud, col, foyer, centre). Une équation scalaire d'ordre n équivaut à un système de taille n (matrice compagnon), et réciproquement on élimine une inconnue pour revenir à une seule équation.

Exercice 1 – Un système de taille trois diagonalisable

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

a) Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de A.

b) En déduire la solution générale de $X' = AX$.

c) Résoudre avec $X(0) = (1, 0, 0)$.

Exercice 2 – Équation d'ordre trois et matrice compagnon

On considère $y''' - 4y'' + 5y' - 2y = 0$.

a) Écrire le système $X' = CX$ associé, avec $X = (y, y', y'')$.

b) Montrer que $\chi_C(\lambda) = (\lambda - 1)^2(\lambda - 2)$.

c) En déduire la solution générale de l'équation, et la solution avec $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$, $y''(0) = 1$.

Exercice 3 – Valeurs propres complexes conjuguées

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

a) Calculer les valeurs propres de A et un vecteur propre pour $2 + i$.

b) En prenant parties réelle et imaginaire de $e^{(2+i)t}v$, donner une base réelle des solutions de $X' = AX$.

c) Décrire les trajectoires.

Exercice 4 – Classification des portraits de phase

Pour chacune des matrices suivantes, déterminer la nature du point d'équilibre 0 de $X' = AX$ et sa stabilité :

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$;

b) $A = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$;

c) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -4 & -1 \end{pmatrix}$.

Exercice 5 – Décroissance exponentielle de la norme

Soit $a \in \mathbb{R}$ et $A = \begin{pmatrix} -1 & a \\ -a & -1 \end{pmatrix}$.

a) Calculer $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|X\|^2$ pour une solution de $X' = AX$.

b) En déduire $\|X(t)\| = \mathrm{e}^{-t}\|X(0)\|$.

c) Expliciter $X(t)$ et décrire les trajectoires selon a.

Exercice 6 – Intégrale première et période

On considère $x' = y$, $y' = -4x$.

a) Montrer que $E = 4x^2 + y^2$ est constante le long des solutions.

b) En déduire que les trajectoires sont des ellipses, et résoudre avec $x(0) = 1$, $y(0) = 0$.

c) Quelle est la période ? Vérifier sur la solution.

Exercice 7 – Wronskien d'un système à coefficients variables

Sur $]0, +\infty[$, on considère $X' = A(t)X$ avec $A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{2}{t^2} & 0 \end{pmatrix}$ (système associé à $y'' = \frac{2}{t^2}y$).

a) Vérifier que $y = t^2$ et $y = \frac{1}{t}$ sont solutions de l'équation scalaire.

b) En déduire une matrice fondamentale, et calculer son déterminant.

c) Retrouver ce résultat par la formule de Liouville.

Exercice 8 – Système triangulaire à coefficients variables

Résoudre sur $]0, +\infty[$ le système $x' = \frac{x}{t} + y$, $y' = \frac{y}{t}$.

a) Résoudre la seconde équation.

b) Reporter dans la première et la résoudre.

c) Vérifier la formule de Liouville sur la matrice fondamentale obtenue.

Exercice 9 – Variation des constantes pour un système

On considère $x' = y$, $y' = -x + t$, avec $x(0) = y(0) = 0$.

a) Écrire le système sous la forme $X' = AX + B(t)$ et donner $\exp(tA)$.

b) Calculer $X(t) = \int_0^t \exp((t-s)A)B(s)\,\mathrm{d}s$.

c) Retrouver le résultat par l'équation scalaire $x'' + x = t$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 10 – Deux oscillateurs couplés

On considère $x'' = -2x + y$, $y'' = x - 2y$.

a) Avec $u = x + y$ et $v = x - y$, découpler le système.

b) En déduire la solution générale, et les pulsations propres.

c) Résoudre avec $x(0) = 1$, $y(0) = 0$, $x'(0) = y'(0) = 0$, et interpréter.

Exercice 11 – Majoration exponentielle des solutions

Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$ diagonalisable, de valeurs propres λ_j, et $\alpha = \max_j \mathrm{Re}\lambda_j$.

a) Montrer qu'il existe $C > 0$ tel que $\|\exp(tA)\| \leq Ce^{\alpha t}$ pour $t \geq 0$.

b) En déduire que si $\alpha < 0$, toutes les solutions de $X' = AX$ tendent vers 0 exponentiellement.

c) Que devient a) pour $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ (non diagonalisable) ?

Exercice 12 – Solutions bornées sur la droite

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ diagonalisable sur $\mathbb{C}$.

a) Montrer que $X' = AX$ admet une solution non nulle bornée sur $\mathbb{R}$ si et seulement si A a une valeur propre imaginaire pure (ou nulle).

b) Montrer que toutes les solutions sont bornées sur $\mathbb{R}$ si et seulement si toutes les valeurs propres sont imaginaires pures.

c) Application : $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 13 – Une droite d'équilibres

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Déterminer les points d'équilibre de $X' = AX$.

b) Résoudre le système.

c) Décrire les trajectoires.

Exercice 14 – Élimination d'une inconnue

On considère $x' = x + y$, $y' = 4x + y$.

a) Montrer que x vérifie $x'' - 2x' - 3x = 0$.

b) En déduire x, puis y.

c) Comparer avec les valeurs propres de la matrice du système.

Exercice 15 – Synthèse : un modèle à deux compartiments

Un médicament passe de l'intestin (quantité x) au sang (quantité y) puis est éliminé : $x' = -ax$, $y' = ax - by$, avec $a, b > 0$, $x(0) = x_0$, $y(0) = 0$.

a) Calculer $x(t)$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

b) Pour $a \neq b$, montrer que $y(t) = \frac{ax_0}{b-a}\left(\mathrm{e}^{-at} - \mathrm{e}^{-bt}\right)$.

c) Déterminer l'instant t^* où y est maximale.

d) Traiter le cas $a = b$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).