Plaquette 1 – Systèmes différentiels, wronskien et variation des constantes

Équations différentielles linéaires — Prépa MP / MPI (2e année)

Exercices

Méthode

On résout $X' = AX$ par **réduction** de A ou par l'**exponentielle de matrice**, on traite l'équation scalaire d'ordre 2 à coefficients variables par **wronskien** et **variation des constantes**, et on applique Cauchy-Lipschitz linéaire.

Exercice 1 – Système diagonalisable

Résoudre $\begin{cases} x' = 4x + 2y \\ y' = x + 3y \end{cases}$

Exercice 2 – Valeurs propres complexes

Résoudre $\begin{cases} x' = -y \\ y' = x \end{cases}$ avec $x(0) = 1$, $y(0) = 0$.

Exercice 3 – Système non diagonalisable

Résoudre $X' = AX$ avec $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ et $X(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Exercice 4 – Wronskien

Soient $y_1 = \mathrm{e}^{t}$ et $y_2 = \mathrm{e}^{-t}$ solutions de $y'' - y = 0$. Calculer leur wronskien et conclure.

Exercice 5 – Variation des constantes

Résoudre $y'' - y = \mathrm{e}^{t}$, puis retrouver le résultat par variation des constantes.

Exercice 6 – Réduction d'ordre

On sait que $y_1(t) = t$ est solution de $t^2 y'' - 2ty' + 2y = 0$ sur $]0\,;+\infty[$. Trouver une seconde solution.

Exercice 7 – Problème de Cauchy

Résoudre $y'' + 4y = 0$ avec $y(0) = 1$ et $y'(0) = 2$.

Exercice 8 – Système avec second membre

Résoudre $X' = AX + B$ avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 9 – Équation à coefficients variables

Résoudre $ty' - y = t^2$ sur $]0\,;+\infty[$.

Exercice 10 – Comportement asymptotique

Soit $X' = AX$ avec $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$. Que devient $X(t)$ quand $t \to +\infty$?

Exercice 11 – Formule de Liouville

Soient y_1, y_2 deux solutions de $y'' + a(t)y' + b(t)y = 0$. Montrer que $W' = -aW$.

Exercice 12 – Oscillateur amorti

Résoudre $y'' + 2y' + 5y = 0$ avec $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$, et décrire le régime.

Exercice 13 – Équation d'Euler

On considère $t^2y'' - 3ty' + 4y = 0$ sur $]0, +\infty[$.

a) Avec $t = \mathrm{e}^s$ et $z(s) = y(\mathrm{e}^s)$, montrer que $z'' - 4z' + 4z = 0$.

b) En déduire les solutions y.

c) Résoudre avec $y(1) = 1$, $y'(1) = 0$.

Exercice 14 – Recollement en un point singulier

On considère $ty' - 2y = 0$.

a) Résoudre sur $]0, +\infty[$ et sur $]-\infty, 0[$.

b) Déterminer les solutions dérivables sur $\mathbb{R}$. Quelle est la dimension de leur espace ?

c) Pourquoi cela ne contredit-il pas le théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire ?

Exercice 15 – Synthèse : système couplé complet

Résoudre $\begin{cases} x' = x + y + \mathrm{e}^t \\ y' = x + y \end{cases}$

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).