Plaquette 4 – Adjoint, endomorphismes symétriques et antisymétriques

Espaces euclidiens — Prépa MP / MPI (2e année)

Corrections détaillées

Boîte à outils

Adjoint.

— $(u+v)^* = u^* + v^*$, $(\lambda u)^* = \lambda u^*$, $(uv)^* = v^* u^*$, $(u^*)^* = u$, $P(u)^* = P(u^*)$.

— $\ker u^* = (\mathrm{Im}\, u)^\perp$, $\mathrm{Im}\, u^* = (\ker u)^\perp$, $\mathrm{rg}\, u^* = \mathrm{rg}\, u$.

— F stable par $u \Rightarrow F^\perp$ stable par u^*.

— En base de matrice de Gram G :

$$\mathrm{Mat}(u^*) = G^{-1} A^{\mathsf{T}} G$$

Symétriques, antisymétriques.

— u antisymétrique $\Leftrightarrow \langle u(x), x\rangle = 0$ pour tout x.

— u^*u est symétrique positif, $\ker u^*u = \ker u$, et $\|u\|_{\mathrm{op}}^2$ est la plus grande valeur propre de u^*u.

— A antisymétrique $\Rightarrow \exp(A) \in SO(n)$ et $(I-A)(I+A)^{-1} \in O(n)$ (transformée de Cayley).

Correction de l'exercice 1 – Adjoint en base non orthonormée

a) $\langle u(x), y\rangle = (AX)^{\mathsf{T}} GY = X^{\mathsf{T}} A^{\mathsf{T}} GY$ et $\langle x, u^*(y)\rangle = X^{\mathsf{T}} GBY$. L'égalité pour tous X, Y donne $GB = A^{\mathsf{T}} G$.

b) $G^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ et $A^{\mathsf{T}} G = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, d'où

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

c) $B \neq A$: u n'est pas symétrique. En effet, u est un projecteur dont le noyau $\mathbb{R}e_2$ n'est pas orthogonal à l'image $\mathbb{R}e_1$ ($\langle e_1, e_2\rangle = 1 \neq 0$) : ce n'est pas un projecteur orthogonal. On vérifie que $B^2 = B$: u^* est aussi un projecteur.

Réponse. $\mathrm{Mat}(u^*) = G^{-1} A^{\mathsf{T}} G = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$; u non symétrique.

Correction de l'exercice 2 – Noyau et image de l'adjoint

a) $y \in \ker u^* \Leftrightarrow \forall x,\ \langle x, u^*(y)\rangle = 0 \Leftrightarrow \forall x,\ \langle u(x), y\rangle = 0 \Leftrightarrow y \perp \mathrm{Im}\, u$.

b) On applique a) à u^* : $\ker u = (\mathrm{Im}\, u^*)^\perp$, puis on prend l'orthogonal. Les dimensions donnent $\mathrm{rg}\, u^* = n - \dim\ker u = \mathrm{rg}\, u$.

c) $E = \ker u \oplus (\ker u)^\perp = \ker u \oplus \mathrm{Im}\, u^*$. Pour $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ (symétrique) : $\ker = \mathbb{R}(1,-1)$, $\mathrm{Im} = \mathbb{R}(1,1)$, orthogonaux. Pour $N = E_{12}$: $\ker N = \mathbb{R}e_1$ et

$$\mathrm{Im} N^* = \mathrm{Im} E_{21} = \mathbb{R}e_2 \perp \ker N$$

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

— alors que $\mathrm{Im}N = \mathbb{R}e_1 = \ker N$: c'est bien l'image de l'**adjoint** qui est orthogonale au noyau.

Réponse. $\ker u^* = (\mathrm{Im}u)^\perp$, $\mathrm{Im}u^* = (\ker u)^\perp$; $E = \ker u \overset{\perp}{\oplus} \mathrm{Im}u^*$.

Correction de l'exercice 3 – Sous-espaces stables et adjoint

a) Pour $y \in F^\perp$ et $x \in F$: $\langle x, u^*(y)\rangle = \langle u(x), y\rangle = 0$ car $u(x) \in F$. Donc $u^*(y) \in F^\perp$.

b) Si $u^* = u$, $F^\perp$ est stable par u. C'est l'argument clé du théorème spectral : on prend une droite propre D, puis on recommence dans $D^\perp$, stable.

c) $u(e_1) = 0$, $u(e_2) = e_1$. $F = \mathbb{R}e_1$ est stable, mais $F^\perp = \mathbb{R}e_2$ ne l'est pas :

$$u(e_2) = e_1 \notin \mathbb{R}e_2$$

— En revanche $F^\perp$ est stable par $u^* = E_{21}$ ✓.

Réponse. F stable par $u \Rightarrow F^\perp$ stable par u^* ; vrai pour u si u est symétrique.

Correction de l'exercice 4 – Endomorphismes antisymétriques

a) Si $u^* = -u$: $\langle u(x), x\rangle = -\langle x, u(x)\rangle$, donc nul. Réciproquement, en polarisant $\langle u(x+y), x+y\rangle = 0$: $\langle u(x), y\rangle + \langle u(y), x\rangle = 0$, c'est-à-dire $u^* = -u$.

b) $u(x) = \lambda x$ avec $x \neq 0$: $0 = \langle u(x), x\rangle = \lambda \|x\|^2$, donc $\lambda = 0$.

c) $\ker u = \ker(-u^*) = (\mathrm{Im}u)^\perp$. $\mathrm{Im}u$ est stable, l'induit v est injectif ($\ker u \cap \mathrm{Im}u = \{0\}$), donc bijectif, et antisymétrique. Son déterminant vérifie

$$\det v = \det v^{\mathsf{T}} = \det(-v) = (-1)^r \det v$$

— avec $\det v \neq 0$ et $r = \mathrm{rg}u$: r est pair.

Réponse. Antisymétrique $\Leftrightarrow \langle u(x), x\rangle = 0$; seule valeur propre réelle 0 ; rang pair.

Correction de l'exercice 5 – Antisymétriques de R³ et produit vectoriel

a) $w \wedge x = (bx_3 - cx_2,\ cx_1 - ax_3,\ ax_2 - bx_1)$, d'où

$$\mathrm{Mat}(u_w) = \begin{pmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{pmatrix}$$

— antisymétrique.

b) A_3 est de dimension 3 et $w \mapsto \mathrm{Mat}(u_w)$ est linéaire injective (la matrice nulle impose $a = b = c = 0$) : c'est un isomorphisme $\mathbb{R}^3 \to A_3$.

c) $w \wedge x = 0 \Leftrightarrow x$ colinéaire à w : $\ker u_w = \mathbb{R}w$. $\mathrm{Im}u_w = (\ker u_w)^\perp = w^\perp$ (antisymétrie), de dimension 2, pair ✓.

Réponse. $\mathrm{Mat}(u_w) = \begin{pmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{pmatrix}$; $\ker u_w = \mathbb{R}w$, $\mathrm{Im}u_w = w^\perp$.

Correction de l'exercice 6 – Un opérateur différentiel symétrique

a) Par parties, le crochet $\Big[(1-t^2)P'Q\Big]_{-1}^{1}$ est nul, donc

$$\langle L(P), Q\rangle = -\int_{-1}^{1} (1-t^2)P'(t)Q'(t)\,\mathrm{d}t$$

— expression symétrique en P et Q : $\langle L(P), Q\rangle = \langle P, L(Q)\rangle$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

b) $\langle L(P), P\rangle = -\int_{-1}^{1}(1-t^2)P'^2 \le 0$.

c) $L(X^k) = (kX^{k-1} - kX^{k+1})' = k(k-1)X^{k-2} - k(k+1)X^k$: matrice triangulaire, valeurs propres $-k(k+1)$, $k = 0, \dots, n$, distinctes et négatives ✓.

Réponse. $\langle L(P), Q\rangle = -\int (1-t^2)P'Q'$; valeurs propres $-k(k+1)$.

Correction de l'exercice 7 – Norme d'opérateur et u*u

a) $(A^{\mathsf{T}}A)^{\mathsf{T}} = A^{\mathsf{T}}A$ et $X^{\mathsf{T}}A^{\mathsf{T}}AX = \|AX\|^2 \ge 0$.

b) Dans une base orthonormée propre, $\|AX\|^2 = \sum \mu_i x_i^2 \le \mu_{\max}\sum x_i^2$, avec égalité pour un vecteur propre associé à $\mu_{\max}$.

c) $A^{\mathsf{T}}A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, de valeurs propres $\frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$. Donc

$$\|A\| = \sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

— (car $\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{6+2\sqrt{5}}{4}$) : le nombre d'or, alors que le rayon spectral de A vaut 1.

Réponse. $\|A\|^2 = \max \mathrm{Sp}(A^{\mathsf{T}}A)$; ici $\|A\| = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Correction de l'exercice 8 – Endomorphismes normaux

a) $\|u(x)\|^2 = \langle u^*u(x), x\rangle$ et $\|u^*(x)\|^2 = \langle uu^*(x), x\rangle$. Si u est normal, ils sont égaux. Réciproquement, $uu^* - u^*u$ est symétrique et sa forme quadratique est nulle, donc il est nul (polarisation).

b) $\|u(x)\| = \|u^*(x)\|$ donne $\ker u = \ker u^*$. Et $u - \lambda\,\mathrm{id}$ est encore normal, d'adjoint $u^* - \lambda\,\mathrm{id}$.

c) Rotation : $uu^* = u^*u = \mathrm{id}$. Symétrique, antisymétrique : $u^* = \pm u$ commute avec u. Pour $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$:

$$AA^{\mathsf{T}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = A^{\mathsf{T}}A$$

— non normale.

Réponse. Normal $\Leftrightarrow \|u(x)\| = \|u^*(x)\|$; rotations, symétriques, antisymétriques sont normaux ; $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ non.

Correction de l'exercice 9 – Symétrique et orthogonal

a) $u^*u = \mathrm{id}$ et $u^* = u$ donnent $u^2 = \mathrm{id}$.

b) u est une symétrie : $E = \ker(u - \mathrm{id}) \oplus \ker(u + \mathrm{id})$. Pour x, y dans ces noyaux : $\langle x, y\rangle = \langle u(x), y\rangle = \langle x, u(y)\rangle = -\langle x, y\rangle$, donc ils sont orthogonaux.

c) Si s est orthogonale, $s^* = s^{-1} = s$. Si s est symétrique, b) montre que ses sous-espaces propres sont orthogonaux et alors, pour $x = x_1 + x_{-1}$,

$$\|s(x)\|^2 = \|x_1 - x_{-1}\|^2 = \|x_1\|^2 + \|x_{-1}\|^2 = \|x\|^2$$

Réponse. $u^2 = \mathrm{id}$; symétrie orthogonale ; une symétrie est orthogonale ssi elle est symétrique.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l'exercice 10 – Adjoint d'un endomorphisme de rang 1

a) $\langle u(x), y\rangle = \langle a, x\rangle\langle b, y\rangle = \langle x, \langle b, y\rangle a\rangle$, donc

$$u^*(y) = \langle b, y\rangle a$$

b) $u^* = u \Leftrightarrow \langle b, y\rangle a = \langle a, y\rangle b$ pour tout $y \Leftrightarrow a$ et b colinéaires (prendre $y = a$ ou $y = b$). u n'est jamais antisymétrique : un antisymétrique a un rang pair, et u est de rang 1.

c) $u^2(x) = \langle a, x\rangle\langle a, b\rangle b = \langle a, b\rangle u(x)$. Si $\langle a, b\rangle \neq 0$, $X(X - \langle a, b\rangle)$ est scindé à racines simples ; sinon $u^2 = 0$ avec $u \neq 0$, non diagonalisable.

Réponse. $u^*(y) = \langle b, y\rangle a$; symétrique ssi a, b colinéaires ; $u^2 = \langle a, b\rangle u$.

Correction de l'exercice 11 – La transformée de Cayley

a) Si $(I + A)X = 0$, alors $0 = X^{\mathsf{T}}(I + A)X = \|X\|^2 + X^{\mathsf{T}}AX = \|X\|^2$, donc $X = 0$.

b) $I - A$ et $(I + A)^{-1}$ commutent (polynômes en A). Avec $A^{\mathsf{T}} = -A$:

$$Q^{\mathsf{T}}Q = (I - A)^{-1}(I + A)(I - A)(I + A)^{-1} = I$$

— car $(I + A)(I - A) = (I - A)(I + A)$.

c) Pour t : $(I + A)^{-1} = \frac{1}{1 + t^2}\begin{pmatrix} 1 & t \\ -t & 1 \end{pmatrix}$ et $Q = \frac{1}{1 + t^2}\begin{pmatrix} 1 - t^2 & 2t \\ -2t & 1 - t^2 \end{pmatrix}$, rotation d'angle θ avec $\cos\theta = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}$ (paramétrage rationnel du cercle). Pour $t = 1$: $Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Réponse. $I + A$ inversible ; $Q \in O(n)$; $Q = \frac{1}{1 + t^2}\begin{pmatrix} 1 - t^2 & 2t \\ -2t & 1 - t^2 \end{pmatrix}$.

Correction de l'exercice 12 – Exponentielle d'une antisymétrique

a) La transposition est continue et linéaire, et $(A^k)^{\mathsf{T}} = (A^{\mathsf{T}})^k$:
$\exp(A)^{\mathsf{T}} = \exp(A^{\mathsf{T}}) = \exp(-A)$. Comme A et $-A$ commutent, $\exp(A)^{\mathsf{T}}\exp(A) = \exp(0) = I$.

b) $\det\exp(A) = \mathrm{e}^{\mathrm{tr}A} = \mathrm{e}^0 = 1$ (la diagonale d'une antisymétrique est nulle).

c) $J^2 = -I$, d'où $J^{2k} = (-1)^k I$, $J^{2k+1} = (-1)^k J$, et

$$\exp(tJ) = \cos(t)I + \sin(t)J = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}$$

Réponse. $\exp(A) \in SO(n)$; $\exp(tJ) = R_t$, rotation d'angle t.

Correction de l'exercice 13 – Forme quadratique associée

a) $q(x \pm y) = q(x) \pm 2\langle u(x), y\rangle + q(y)$ par symétrie ($\langle u(y), x\rangle = \langle u(x), y\rangle$). En soustrayant :

$$q(x + y) - q(x - y) = 4\langle u(x), y\rangle$$

b) Si $q_u = q_v$, alors $\langle u(x), y\rangle = \langle v(x), y\rangle$ pour tous x, y, d'où $u = v$.

c) Tout antisymétrique non nul convient, par exemple la rotation d'un quart de tour : $\langle Jx, x\rangle = 0$ pour tout x.

Réponse. Polarisation : q détermine u symétrique ; faux pour J antisymétrique.

Correction de l'exercice 14 – Adjoint de la dérivation pour un poids

a) $t^k\mathrm{e}^{-t}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ (croissances comparées) ; la définition vient de la continuité de $P^2\mathrm{e}^{-t} \geq 0$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

b) Par parties, avec $(Q\mathrm{e}^{-t})' = (Q' - Q)\mathrm{e}^{-t}$ et un crochet $[PQ\mathrm{e}^{-t}]_0^{+\infty} = -P(0)Q(0)$:

$$\int_0^{+\infty} P'Q\mathrm{e}^{-t} = -P(0)Q(0) - \int_0^{+\infty} P(Q' - Q)\mathrm{e}^{-t}$$

c) Non. L'adjoint D^* existe (E est de dimension finie), mais le terme de bord l'empêche d'être $\mathrm{id} - D$: pour $P = Q = 1$, $\langle D(1), 1\rangle = 0$ alors que $\langle 1, 1 - 0\rangle = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = 1$. Le calcul « formel » de l'adjoint par intégration par parties n'est valable que si les termes de bord s'annulent.

Réponse. $\langle P', Q\rangle = -P(0)Q(0) + \langle P, Q - Q'\rangle$; le terme de bord empêche $D^* = \mathrm{id} - D$.

Correction de l'exercice 15 – Synthèse : un symétrique de rang 1

a) $\|u\|^2 = 6$ et $p = \dfrac{uu^{\mathsf{T}}}{6}$, donc $A = 6p$.

b) $\mathrm{Im}A = \mathbb{R}u$ et $\ker A = u^{\perp} = \{x + 2y + z = 0\}$, orthogonaux ($A$ est symétrique).

c) $p^2 = p$ donne $A^n = 6^n p$ ($n \geq 1$) et

$$\exp(A) = I + (\mathrm{e}^6 - 1)p, \qquad \|A\| = 6$$

— (plus grande valeur propre de $A^{\mathsf{T}}A = A^2 = 36p$, soit 36).

d) $d(x, \ker A) = \|p(x)\| = \dfrac{|\langle x, u\rangle|}{\|u\|} = \dfrac{1}{\sqrt{6}}$.

Réponse. $A = 6p$; $A^n = 6^n p$, $\exp(A) = I + (\mathrm{e}^6 - 1)p$, $\|A\| = 6$; $d = \dfrac{1}{\sqrt{6}}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).