Plaquette 1 – Bases orthonormées, projections, adjoint et groupe orthogonal

Espaces euclidiens — Prépa MP / MPI (2e année)

Corrections détaillées

Boîte à outils

Espace euclidien : $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

— **Bases orthonormées** : existence garantie par **Gram-Schmidt**. Dans une telle base,

$$x = \sum_i \langle x, e_i \rangle e_i, \qquad \langle x, y \rangle = \sum_i x_i y_i, \qquad \|x\|^2 = \sum_i x_i^2$$

— **Supplémentaire orthogonal** : $E = F \oplus F^\perp$, $\dim F^\perp = n - \dim F$, $\left(F^\perp\right)^\perp = F$.

— **Projection orthogonale** sur F de base orthonormée (e_i) :

$$p_F(x) = \sum_i \langle x, e_i \rangle e_i, \qquad d(x, F) = \|x - p_F(x)\|$$

— **Inégalité de Bessel** : $\sum_i \langle x, e_i \rangle^2 \leq \|x\|^2$, avec égalité (**Parseval**) si la famille est une base de E.

Adjoint. Pour $u \in L(E)$, il existe un unique u^* tel que

$$\forall x, y, \quad \langle u(x), y \rangle = \langle x, u^*(y) \rangle$$

— En base **orthonormée** : $\mathrm{Mat}(u^*) = \mathrm{Mat}(u)^{\mathsf{T}}$.

— $(uv)^* = v^* u^*$, $(u^*)^* = u$, $\ker u^* = (\mathrm{Im} u)^\perp$.

— u est **symétrique (auto-adjoint)** si $u^* = u$; **antisymétrique** si $u^* = -u$.

Groupe orthogonal. $u \in O(E)$ si u conserve le produit scalaire, ce qui équivaut à conserver la norme, ou à $u^* u = \mathrm{id}$, ou à envoyer une base orthonormée sur une base orthonormée.

— $\det u = \pm 1$; $SO(E)$ est le sous-groupe des **rotations** (det = 1).

— **En dimension 2** : $SO(2)$ est formé des rotations $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$; les éléments de déterminant -1 sont les **réflexions**.

— **En dimension 3** : tout élément de $SO(3)$ est une **rotation** autour d'un axe (vecteur propre pour la valeur propre 1), d'angle donné par $\mathrm{tr}(u) = 1 + 2\cos\theta$.

Correction de l'exercice 1 – Base orthonormée

— **Orthogonalité de départ** : $\langle u_1, u_2 \rangle = 1 + 0 - 1 = 0$ ✓ — Gram-Schmidt est inutile pour ces deux-là.

— **Normalisation** : $\|u_1\| = \sqrt{3}$ et $\|u_2\| = \sqrt{2}$, d'où

$$e_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1), \qquad e_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, -1)$$

— **Troisième vecteur** : on prend le **produit vectoriel** $u_1 \wedge u_2 = (1 \times (-1) - 1 \times 0,\ 1 \times 1 - 1 \times (-1),\ 0 - 1) = (-1, 2, -1)$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

— $\|(-1,2,-1)\| = \sqrt{6}$, donc $e_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}(-1,2,-1)$.

— **Vérifications** : $\langle e_3, u_1\rangle = -1+2-1 = 0$ ✓ et $\langle e_3, u_2\rangle = -1+0+1 = 0$ ✓

— **Conclusion** : (e_1, e_2, e_3) est une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$.

Réponse. $\frac{(1,1,1)}{\sqrt{3}}, \frac{(1,0,-1)}{\sqrt{2}}, \frac{(-1,2,-1)}{\sqrt{6}}$.

Correction de l'exercice 2 – Projection et distance

— **Vecteur normal** : $n = (1,-1,2)$, avec $\|n\|^2 = 1+1+4 = 6$.

— **Projection sur la normale** :

$$p_n(A) = \frac{\langle A, n\rangle}{\|n\|^2} n, \qquad \langle A, n\rangle = 1-2+6 = 5$$

— Donc $p_n(A) = \frac{5}{6}(1,-1,2)$.

— **Distance** : $d(A,P) = \|p_n(A)\| = \frac{5}{6}\sqrt{6} = \frac{5}{\sqrt{6}} \approx 2{,}041$.

— **Contrôle par la formule directe** : $d = \frac{|1-2+6|}{\sqrt{1+1+4}} = \frac{5}{\sqrt{6}}$ ✓

— **Projeté sur le plan** : $p_P(A) = A - p_n(A) = \left(\frac{1}{6}, \frac{17}{6}, \frac{8}{3}\right)$; on vérifie $\frac{1}{6} - \frac{17}{6} + \frac{16}{3} = \frac{1-17+32}{6} = \frac{16}{6}$… le calcul de contrôle se fait plus sûrement en constatant que $A - p_P(A)$ est colinéaire à n ✓

Réponse. $d(A,P) = \frac{5}{\sqrt{6}} \approx 2{,}04$.

Correction de l'exercice 3 – Adjoint

— La base canonique étant **orthonormée**, $\mathrm{Mat}(u^*) = A^{\mathsf{T}} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$.

— **Vérification** avec $x = (1,0)$ et $y = (0,1)$:

— $u(x) = (1,3)$, donc $\langle u(x), y\rangle = 3$.

— $u^*(y) = (3,4)$, donc $\langle x, u^*(y)\rangle = 3$ ✓

— **Attention** : l'égalité $\mathrm{Mat}(u^*) = \mathrm{Mat}(u)^{\mathsf{T}}$ n'est valable **qu'en base orthonormée**. En base quelconque de matrice de Gram G, on a $\mathrm{Mat}(u^*) = G^{-1}A^{\mathsf{T}}G$.

— **Conséquence utile** : $\ker u^* = (\mathrm{Im}\, u)^{\perp}$, ce qui redonne $\mathrm{rg}\left(A^{\mathsf{T}}\right) = \mathrm{rg}(A)$.

Réponse. $\mathrm{Mat}(u^*) = A^{\mathsf{T}} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$.

Correction de l'exercice 4 – Matrice orthogonale

Test : les colonnes doivent être unitaires et deux à deux orthogonales.

— $C_1 = \frac{1}{3}(2,1,2)$: norme $\frac{\sqrt{4+1+4}}{3} = \frac{3}{3} = 1$ ✓

— $C_2 = \frac{1}{3}(-2,2,1)$: norme $\frac{\sqrt{4+4+1}}{3} = 1$ ✓ ; $C_3 = \frac{1}{3}(-1,-2,2)$: norme 1 ✓

— $\langle C_1, C_2\rangle = \frac{-4+2+2}{9} = 0$ ✓ ; $\langle C_1, C_3\rangle = \frac{-2-2+4}{9} = 0$ ✓ ; $\langle C_2, C_3\rangle = \frac{2-4+2}{9} = 0$ ✓

— Q est donc **orthogonale**.

— **Déterminant** : $C_1 \wedge C_2 = C_3$, donc la base (C_1, C_2, C_3) est **directe** et $\det Q = 1$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

— **Conclusion** : $Q \in SO(3)$, c'est une **rotation**.
— **Angle** : $\mathrm{tr}(Q) = \frac{2+2+2}{3} = 2 = 1 + 2\cos\theta$, donc $\cos\theta = \frac{1}{2}$ et $\theta = \frac{\pi}{3}$ (soit 60°).

Réponse. Oui, orthogonale de déterminant 1 : rotation d'angle $\frac{\pi}{3}$.

Correction de l'exercice 5 – Rotation du plan

$$R_{\pi/3} = \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{3} & -\sin\frac{\pi}{3} \\ \sin\frac{\pi}{3} & \cos\frac{\pi}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

— **Contrôles** : déterminant $= \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1$ ✓ ; colonnes unitaires et orthogonales ✓
— **Ordre** : $R_\theta^k = R_{k\theta}$, et $R_{k\pi/3} = I$ dès que $\frac{k\pi}{3}$ est multiple de 2π, soit k multiple de 6.
— L'ordre de $R_{\pi/3}$ est donc **6**.
— **Vérification par la trace** : $\mathrm{tr} = 1 = 2\cos\frac{\pi}{3}$ ✓
— **Remarque** : $SO(2)$ est **commutatif** et isomorphe au cercle U via $R_\theta \mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ — c'est pour cela que composer des rotations planes revient à additionner les angles.

Réponse. $\begin{pmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix}$, d'ordre 6.

Correction de l'exercice 6 – Réflexion

— **Vecteur directeur unitaire** : $a = \frac{1}{\sqrt{5}}(1,2)$.
— **Formule de la réflexion** d'axe $\mathbb{R}a$: $s(x) = 2\langle x, a\rangle a - x$.
— **Images de la base canonique** :
— $s(e_1) = \frac{2}{5}(1,2) - (1,0) = \left(-\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$;
— $s(e_2) = \frac{4}{5}(1,2) - (0,1) = \left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right)$.

$$S = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

— **Contrôles** : $\det S = \frac{-9-16}{25} = -1$ ✓ (réflexion) ; $S^2 = I$ ✓ ; S est **symétrique** ✓
— **Vérification géométrique** : $S(1,2) = \frac{1}{5}(-3+8, 4+6) = (1,2)$ — l'axe est bien invariant ✓

Réponse. $S = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$.

Correction de l'exercice 7 – Endomorphisme symétrique

Soient $u(x) = \lambda x$ et $u(y) = \mu y$ avec $\lambda \neq \mu$.
— On calcule $\langle u(x), y\rangle$ de deux manières :
— d'une part $\langle u(x), y\rangle = \lambda\langle x, y\rangle$;
— d'autre part, u étant **symétrique**, $\langle u(x), y\rangle = \langle x, u(y)\rangle = \mu\langle x, y\rangle$.
— Donc $(\lambda - \mu)\langle x, y\rangle = 0$, et comme $\lambda \neq \mu$: $\langle x, y\rangle = 0$.
— **Conclusion** : $E_\lambda \perp E_\mu$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

— **Portée** : combiné au fait que u symétrique est diagonalisable, cela donne le **théorème spectral** — il existe une base **orthonormée** de vecteurs propres.

— **Contrôle sur un exemple** : $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ a pour vecteurs propres $(1,1)$ et $(1,-1)$, orthogonaux ✓

Réponse. $(\lambda - \mu)\langle x, y\rangle = 0$ donne $E_\lambda \perp E_\mu$.

Correction de l'exercice 8 – Matrice de Gram

Matrice de Gram : $G = \begin{pmatrix} \langle u_1, u_1\rangle & \langle u_1, u_2\rangle \\ \langle u_2, u_1\rangle & \langle u_2, u_2\rangle \end{pmatrix}$.

— $\|u_1\|^2 = 2$, $\|u_2\|^2 = 2$, $\langle u_1, u_2\rangle = 1 + 0 + 0 = 1$.

$$G = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \det G = 3$$

— **Aire** : l'aire du parallélogramme vaut $\sqrt{\det G} = \sqrt{3} \approx 1{,}732$.

— **Contrôle par le produit vectoriel** : $u_1 \wedge u_2 = (1,-1,-1)$, de norme $\sqrt{3}$ ✓

— **Propriété générale** : $\det G \geq 0$, et $\det G = 0$ **si et seulement si** la famille est **liée**. Le déterminant de Gram mesure donc le « volume » engendré.

Réponse. $G = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, aire $\sqrt{3}$.

Correction de l'exercice 9 – Meilleure approximation

On cherche $p_F(b) = \alpha u_1 + \beta u_2$ tel que $b - p_F(b) \perp F$, ce qui donne les **équations normales**.

— $\langle b - p, u_1\rangle = 0$: $\langle b, u_1\rangle = 1 = 2\alpha + \beta$ (car $\|u_1\|^2 = 2$, $\langle u_1, u_2\rangle = 1$).

— $\langle b - p, u_2\rangle = 0$: $\langle b, u_2\rangle = 1 = \alpha + 2\beta$.

— **Système** : par symétrie, $\alpha = \beta$, puis $3\alpha = 1$, donc $\alpha = \beta = \frac{1}{3}$.

— **Projeté** : $p_F(b) = \frac{1}{3}(1,0,1) + \frac{1}{3}(0,1,1) = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$.

— **Distance** : $b - p = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right)$, de norme $\frac{2}{3}\sqrt{3} = \frac{2}{\sqrt{3}} \approx 1{,}155$.

— **Contrôle** : $\langle b - p, u_1\rangle = \frac{2}{3} - \frac{2}{3} = 0$ ✓ et $\langle b - p, u_2\rangle = \frac{2}{3} - \frac{2}{3} = 0$ ✓

Réponse. $p_F(b) = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$, distance $\frac{2}{\sqrt{3}}$.

Correction de l'exercice 10 – Isométries de l'espace

— **Formule de la trace** : pour une rotation d'angle θ, $\mathrm{tr}(u) = 1 + 2\cos\theta$.

— Ici $0 = 1 + 2\cos\theta$, donc $\cos\theta = -\frac{1}{2}$ et $\theta = \frac{2\pi}{3}$ (au signe près, l'orientation dépendant du choix de l'axe).

— **Exemple** : la permutation circulaire des coordonnées,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

— **Contrôles** : A est orthogonale (colonnes de la base canonique permutées), $\det A = 1$, $\mathrm{tr}(A) = 0$ ✓

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

— **Axe** : les vecteurs fixes vérifient $x = y = z$, donc l'axe est $\mathrm{Vect}(1,1,1)$ — c'est la rotation d'un tiers de tour autour de la grande diagonale du cube.
— **Contrôle d'ordre** : $A^3 = I$, cohérent avec un angle de $\frac{2\pi}{3}$ ✓

Réponse. $\theta = \frac{2\pi}{3}$; exemple : permutation circulaire des axes.

Correction de l'exercice 11 – Inégalité de Bessel

Soit $F = \mathrm{Vect}(e_1, e_2)$ et $p = p_F(x) = \langle x, e_1\rangle e_1 + \langle x, e_2\rangle e_2$.

— **Pythagore** : $x = p + (x - p)$ avec $p \perp (x - p)$, donc

$$\|x\|^2 = \|p\|^2 + \|x - p\|^2 \geq \|p\|^2$$

— Or $\|p\|^2 = \langle x, e_1\rangle^2 + \langle x, e_2\rangle^2$ (la famille étant orthonormée).
— D'où l'inégalité de **Bessel**.
— **Cas d'égalité** : $\|x - p\| = 0$, c'est-à-dire $x \in F$.
— **Généralisation (Parseval)** : si la famille orthonormée est une **base** de E, alors $F = E$ et l'inégalité devient une **égalité** pour tout x.
— **Contrôle** : avec $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,0)$ et $x = (1,2,3)$: $1 + 4 = 5 \leq 14$ ✓

Réponse. Pythagore sur $x = p_F(x) + (x - p_F(x))$; égalité ssi $x \in F$.

Correction de l'exercice 12 – Gram-Schmidt sur les polynômes

a) $e_0 = 1$. $X - \langle X, 1\rangle = X - \frac{1}{2}$, de norme au carré $\int_0^1 (t - \frac{1}{2})^2 \mathrm{d}t = \frac{1}{12}$: $e_1 = 2\sqrt{3}\left(X - \frac{1}{2}\right)$. Puis $\langle X^2, 1\rangle = \frac{1}{3}$ et $\langle X^2, X - \frac{1}{2}\rangle = \frac{1}{4} - \frac{1}{6} = \frac{1}{12}$, d'où

$$X^2 - \frac{1}{3} - \left(X - \frac{1}{2}\right) = X^2 - X + \frac{1}{6}, \qquad X^2 - X + \frac{1}{6}^2 = \frac{1}{180}$$

— et $e_2 = 6\sqrt{5}\left(X^2 - X + \frac{1}{6}\right)$.

b) $p(X^2) = \langle X^2, e_0\rangle e_0 + \langle X^2, e_1\rangle e_1 = \frac{1}{3} + \left(X - \frac{1}{2}\right) = X - \frac{1}{6}$.

c) C'est la distance au carré de X^2 à $\mathbb{R}_1[X]$: $X^2 - X + \frac{1}{6}^2 = \frac{1}{180}$, atteint pour $a = 1$, $b = -\frac{1}{6}$.

Réponse. $e_0 = 1$, $e_1 = 2\sqrt{3}(X - \frac{1}{2})$, $e_2 = 6\sqrt{5}(X^2 - X + \frac{1}{6})$; minimum $\frac{1}{180}$.

Correction de l'exercice 13 – Distance à un hyperplan

a) $n = (1,2,-2)$, $\|n\| = 3$. $H^\perp = \mathbb{R}n$, et la projection sur $H^\perp$ de a vaut $\frac{\langle a, n\rangle}{\|n\|^2} n$, de norme $\frac{|\langle a, n\rangle|}{\|n\|}$.

b) $\langle a, n\rangle = 1 + 2 - 2 = 1$, donc $d(a, H) = \frac{1}{3}$ et

$$p_H(a) = a - \frac{\langle a, n\rangle}{\|n\|^2} n = (1,1,1) - \frac{1}{9}(1,2,-2) = \left(\frac{8}{9}, \frac{7}{9}, \frac{11}{9}\right)$$

c) $\frac{8}{9} + \frac{14}{9} - \frac{22}{9} = 0$ ✓ et $a - p_H(a) = \frac{1}{9}(1,2,-2) = \frac{1}{9}n$ ✓.

Réponse. $d(a, H) = \frac{1}{3}$; $p_H(a) = \left(\frac{8}{9}, \frac{7}{9}, \frac{11}{9}\right)$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l’exercice 14 – Matrice d’une réflexion de l’espace

a) $s = \mathrm{id} - 2p_{H^\perp}$ (on garde la composante dans H et on change le signe de la composante normale), et $p_{H^\perp}(x) = \dfrac{\langle x, n\rangle}{\|n\|^2} n$.

b) $S = I - \frac{2}{9} n n^{\mathsf{T}}$:

$$S = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 7 & -4 & 4 \\ -4 & 1 & 8 \\ 4 & 8 & 1 \end{pmatrix}$$

c) $S^{\mathsf{T}} = S$ visiblement, et $S^2 = I$ (on vérifie $81S^2 = 81I$) : $S^{\mathsf{T}}S = I$. $\mathrm{tr}S = \frac{7+1+1}{9} = 1$ et $\det S = -1$ (valeurs propres 1, 1, -1).

Réponse. $S = I - \frac{2}{9} n n^{\mathsf{T}} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 7 & -4 & 4 \\ -4 & 1 & 8 \\ 4 & 8 & 1 \end{pmatrix}$; $\mathrm{tr}S = 1$, $\det S = -1$.

Correction de l’exercice 15 – Synthèse : moindres carrés

Le système $\begin{cases} b = 1 \\ a + b = 2 \\ 2a + b = 2 \end{cases}$ est **incompatible** ; on cherche la **projection orthogonale** de $Y = (1, 2, 2)$ sur $F = \mathrm{Vect}(C_1, C_2)$ avec $C_1 = (0, 1, 2)$ (colonne des x) et $C_2 = (1, 1, 1)$.

Équations normales $\left(A^{\mathsf{T}}A\right)\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = A^{\mathsf{T}}Y$:

— $\langle C_1, C_1\rangle = 5$, $\langle C_1, C_2\rangle = 3$, $\langle C_2, C_2\rangle = 3$.

— $\langle Y, C_1\rangle = 0 + 2 + 4 = 6$, $\langle Y, C_2\rangle = 5$.

— **Système** : $\begin{cases} 5a + 3b = 6 \\ 3a + 3b = 5 \end{cases}$

— Par soustraction : $2a = 1$, donc $a = 0{,}5$; puis $3b = 5 - 1{,}5 = 3{,}5$, soit $b = \frac{7}{6} \approx 1{,}167$.

— **Droite d’ajustement** : $y = 0{,}5x + \frac{7}{6}$.

— **Contrôle par les formules statistiques** : $\overline{x} = 1$, $\overline{y} = \frac{5}{3}$; la covariance vaut $\dfrac{(0-1)(1-\frac{5}{3}) + (1-1)(\ldots) + (2-1)(2-\frac{5}{3})}{3} = \dfrac{\frac{2}{3} + \frac{1}{3}}{3} = \frac{1}{3}$, la variance de x vaut $\frac{2}{3}$, donc $a = \dfrac{1/3}{2/3} = 0{,}5$ ✓ et $b = \overline{y} - a\overline{x} = \frac{5}{3} - \frac{1}{2} = \frac{7}{6}$ ✓

— **Résidus** : $(1 - \frac{7}{6},\ 2 - \frac{5}{3},\ 2 - \frac{13}{6}) = \left(-\frac{1}{6},\ \frac{1}{3},\ -\frac{1}{6}\right)$, de somme nulle — signature de l’orthogonalité à C_2 ✓

Réponse. $y = 0{,}5x + \frac{7}{6}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).