Plaquette 5 – Isométries vectorielles : groupe orthogonal, rotations, réflexions

Espaces euclidiens — Prépa MP / MPI (2e année)

Corrections détaillées

Boîte à outils

Groupe orthogonal.

— $M \in O(n) \Leftrightarrow M^{\mathsf{T}}M = I \Leftrightarrow$ colonnes orthonormées $\Leftrightarrow$ conservation de la norme.

— Valeurs propres réelles ± 1, $\det M = \pm 1$; $SO(n) = \{\det = 1\}$.

— Plan : R_θ (rotations, commutent entre elles) et $S_\alpha = \begin{pmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & -\cos 2\alpha \end{pmatrix}$ (réflexions), avec $S_\alpha S_\beta = R_{2(\alpha-\beta)}$.

— Rotation d'axe dirigé par u unitaire et d'angle θ (formule de Rodrigues) :

$$R = \cos\theta\, I + (1-\cos\theta)\, uu^{\mathsf{T}} + \sin\theta\, [u]_\wedge$$

— où $[u]_\wedge$ est la matrice de $x \mapsto u \wedge x$; on a $\operatorname{tr} R = 1 + 2\cos\theta$ et $\dfrac{R - R^{\mathsf{T}}}{2} = \sin\theta\, [u]_\wedge$.

— **Householder** : si $\|a\| = \|b\|$, $a \neq b$, la réflexion de vecteur normal $a - b$ échange a et b.

Correction de l'exercice 1 – Classification des matrices orthogonales 2 × 2

a) La première colonne est unitaire : $(\cos\varphi, \sin\varphi)$. La seconde est unitaire et orthogonale : $\pm(-\sin\varphi, \cos\varphi)$. Le signe + donne R_φ ($\det = 1$), le signe − donne $S_{\varphi/2}$ ($\det = -1$).

b) $S_\alpha(\cos\alpha, \sin\alpha) = (\cos\alpha, \sin\alpha)$ (formules de duplication) et $S_\alpha(-\sin\alpha, \cos\alpha) = -(-\sin\alpha, \cos\alpha)$: symétrie orthogonale par rapport à la droite d'angle α.

c) Par calcul trigonométrique :

$$S_\alpha S_\beta = R_{2(\alpha-\beta)}, \qquad R_\theta S_\alpha = S_{\alpha+\theta/2}$$

— La composée de deux réflexions est une rotation d'angle double de l'angle entre les droites.

Réponse. $O(2) = \{R_\theta\} \cup \{S_\alpha\}$; $S_\alpha S_\beta = R_{2(\alpha-\beta)}$, $R_\theta S_\alpha = S_{\alpha+\theta/2}$.

Correction de l'exercice 2 – Reconnaître une réflexion de l'espace

a) Les colonnes sont de norme $\frac{1}{3}\sqrt{1+4+4} = 1$ et orthogonales (par exemple $\frac{1}{9}(2+2-4) = 0$). $M^{\mathsf{T}} = M$ se lit.

b) $M^2 = M^{\mathsf{T}}M = I$: valeurs propres ± 1. $\operatorname{tr} M = 1$ et $\det M = -1$, d'où le spectre $\{1, 1, -1\}$.

c) M est une symétrie orthogonale par rapport au plan $\ker(M - I)$.

$M - I = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & -2 \\ 2 & -2 & -2 \end{pmatrix}$: le plan est $\{-x + y + z = 0\}$, de normale $n = (1, -1, -1)$, et

$$Mn = -n$$

— C'est la réflexion par rapport au plan $x - y - z = 0$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Réponse. M orthogonale symétrique, det $= -1$: réflexion par rapport au plan $x - y - z = 0$.

Correction de l'exercice 3 – Matrice d'une rotation par la formule de Rodrigues

a) $uu^{\mathsf{T}} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $[u]_\wedge = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

b) $\cos\frac{\pi}{2} = 0$, $\sin\frac{\pi}{2} = 1$: $R = uu^{\mathsf{T}} + [u]_\wedge$, soit

$$R = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix}$$

c) $R(1,1,0) = (1,1,0)$ ✓ ; $\mathrm{tr}R = 1 = 1 + 2\cos\frac{\pi}{2}$ ✓ ; la première colonne a pour norme au carré $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = 1$ ✓.

Réponse. $R = uu^{\mathsf{T}} + [u]_\wedge$ (matrice ci-dessus) ; $Ru = u$, $\mathrm{tr}R = 1$.

Correction de l'exercice 4 – Conservation de la norme et du produit scalaire

a) Par polarisation :

$$\langle u(x), u(y)\rangle = \frac{1}{4}\left(\|u(x+y)\|^2 - \|u(x-y)\|^2\right) = \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right) = \langle x, y\rangle$$

b) $\langle u^* u(x), y\rangle = \langle x, y\rangle$ pour tous x, y, donc $u^* u = \mathrm{id}$; en dimension finie, u est bijective d'inverse u^*.

c) $u = 2\,\mathrm{id}$ conserve l'orthogonalité sans être orthogonale. Si u conserve l'orthogonalité et $\|u(e_i)\| = k$ pour une base orthonormée, alors $\frac{1}{k}u$ envoie cette base sur une base orthonormée : $u = k\,v$ avec v orthogonale (similitude).

Réponse. Conservation de la norme ⇒ du produit scalaire (polarisation) ⇒ $u^* u = \mathrm{id}$; $2\,\mathrm{id}$ conserve l'orthogonalité sans être orthogonale.

Correction de l'exercice 5 – Réflexion de Householder

a) $\|x\| = \|y\| = 5$, $n = (-2, 4, 0)$, $\|n\|^2 = 20$.

b) $S = I - \frac{2}{20}nn^{\mathsf{T}}$:

$$S = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} & 0 \\ \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad Sx = \left(\frac{9}{5} + \frac{16}{5}, \frac{12}{5} - \frac{12}{5}, 0\right) = (5, 0, 0)$$

c) En général $\langle x - y, x + y\rangle = \|x\|^2 - \|y\|^2 = 0$, donc la réflexion d'hyperplan $(x-y)^\perp$ fixe $x + y$ et change $x - y$ en son opposé : elle envoie x sur y. On envoie ainsi la première colonne d'une matrice sur $(\|C_1\|, 0, \ldots, 0)$, puis on recommence sur le bloc restant : $A = QR$ avec Q produit de réflexions.

Réponse. $S = I - \frac{1}{10}nn^{\mathsf{T}} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} & 0 \\ \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $Sx = y$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l'exercice 6 – Décomposition QR

a) $q_1 = \frac{1}{5}(3,4)$. $\langle a_2, q_1\rangle = \frac{3+8}{5} = \frac{11}{5}$, et $a_2 - \frac{11}{5}q_1 = \left(1 - \frac{33}{25}, 2 - \frac{44}{25}\right) = \frac{2}{25}(-4,3)$, de norme $\frac{2}{5}$: $q_2 = \frac{1}{5}(-4,3)$.

b) $Q = \frac{1}{5}\begin{pmatrix}3 & -4\\ 4 & 3\end{pmatrix}$ et $R = \begin{pmatrix}5 & \frac{11}{5}\\ 0 & \frac{2}{5}\end{pmatrix}$ (coefficients $\langle a_j, q_i\rangle$). Vérification de la deuxième colonne :

$$\frac{11}{5}q_1 + \frac{2}{5}q_2 = \frac{1}{25}(33-8,\ 44+6) = (1,2)$$

c) $\det Q = 1$ et $\det R = 5 \times \frac{2}{5} = 2 = 6 - 4 = \det A$ ✓.

Réponse. $Q = \frac{1}{5}\begin{pmatrix}3 & -4\\ 4 & 3\end{pmatrix}$, $R = \begin{pmatrix}5 & \frac{11}{5}\\ 0 & \frac{2}{5}\end{pmatrix}$.

Correction de l'exercice 7 – Matrices orthogonales triangulaires ou entières

a) $T^{-1} = T^{\mathrm{T}}$: l'inverse d'une triangulaire supérieure est triangulaire supérieure, et T^{T} est triangulaire inférieure. Donc T^{-1} est diagonale, puis T aussi, et $t_{ii}^2 = 1$.

b) Chaque colonne est un vecteur unitaire à coordonnées entières : un seul coefficient non nul, égal à ± 1. Les colonnes étant orthogonales, ces coefficients sont sur des lignes distinctes.

c) Choix d'une permutation et de n signes :

$$\text{card} = 2^n n!$$

— Pour $n = 2$: 8 matrices, les rotations d'angles $0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$ et les réflexions par rapport aux axes et aux bissectrices (le groupe des isométries du carré).

Réponse. Triangulaire orthogonale = diag(± 1) ; $2^n n!$ matrices orthogonales entières (8 pour $n = 2$).

Correction de l'exercice 8 – Valeurs propres et déterminant d'une isométrie

a) $u(x) = \lambda x$ donne $\|x\| = |\lambda|\|x\|$. Et $\det(u^* u) = (\det u)^2 = 1$.

b) $u(F) \subset F$ et u injective donnent $u(F) = F$. Pour $y \in F^\perp$ et $x \in F$, $x = u(x')$ avec $x' \in F$, d'où $\langle u(y), x\rangle = \langle u(y), u(x')\rangle = \langle y, x'\rangle = 0$.

c) χ_u est réel de degré 3 : une racine réelle ± 1. Les racines non réelles sont conjuguées, de produit $|z|^2 = 1$; si toutes les racines sont réelles, elles valent ± 1 avec un produit égal à 1. Dans tous les cas 1 est valeur propre :

$$\det u = 1 \implies 1 \in \mathrm{Sp} u$$

— L'axe $D = \ker(u - \mathrm{id})$ est stable, donc $D^\perp$ aussi par b).

Réponse. Valeurs propres réelles ± 1, det = ± 1 ; $F^\perp$ stable ; dans $SO(3)$, 1 est valeur propre.

Correction de l'exercice 9 – Orientation de l'angle d'une rotation

a) Dans la base orthonormée directe $(x, u \wedge x, u)$, R agit comme la rotation plane d'angle θ sur les deux premiers vecteurs.

b) $\det(u, x, \cos\theta x + \sin\theta u \wedge x) = \sin\theta \det(u, x, u \wedge x) = \sin\theta$ (la base $(u, x, u \wedge x)$ est

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

orthonormée directe).

c) $\mathrm{tr}P = 0$, donc $\cos\theta = -\frac{1}{2}$. Avec $x = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0)$: $Px = \frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,-1)$ et

$$\det(u,x,Px) = \frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{2}\begin{vmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 1\\ 1 & 0 & -1\end{vmatrix} = \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

— donc $\sin\theta > 0$ et $\theta = \frac{2\pi}{3}$ (autour de u orienté par $(1,1,1)$).

Réponse. $\sin\theta = \det(u,x,R(x))$; la permutation circulaire est la rotation d'angle $\frac{2\pi}{3}$ autour de $(1,1,1)$.

Correction de l'exercice 10 – Les réflexions engendrent le groupe orthogonal

a) Une isométrie qui fixe a laisse stable $\mathbb{R}a$, donc $a^\perp$.

b) Soit a unitaire. Si $u(a) = a$, u induit une isométrie de $a^\perp$, de dimension $n-1$, produit d'au plus $n-1$ réflexions (prolongées par l'identité sur $\mathbb{R}a$). Sinon, la réflexion s échangeant a et $u(a)$ vérifie $su(a) = a$, et su est un produit d'au plus $n-1$ réflexions : $u = s(su)$ en a au plus n.

c) Une réflexion a pour déterminant -1 : un produit de k réflexions a pour déterminant $(-1)^k$. Une rotation (det = 1) non triviale n'est pas une réflexion :

$$k = 2$$

— (deux réflexions par rapport à deux plans contenant l'axe, d'angle $\frac{\theta}{2}$).

Réponse. Au plus n réflexions ; det $= (-1)^k$; une rotation non triviale de $\mathbb{R}^3$ est produit de 2 réflexions.

Correction de l'exercice 11 – Le groupe orthogonal du plan n'est pas commutatif

a) $R_\theta R_\varphi = R_{\theta+\varphi} = R_\varphi R_\theta$, et $\theta \mapsto R_\theta$ correspond à $\theta \mapsto \mathrm{e}^{i\theta}$: $R_\theta \mapsto \mathrm{e}^{i\theta}$ est un isomorphisme de groupes.

b) $S_0 = \mathrm{diag}(1,-1)$. $R_\theta S_0 = S_{\theta/2}$ et $S_0 R_\theta = S_{-\theta/2}$: différents si $\theta \notin \pi\mathbb{Z}$.

c) $S_0 R_\theta S_0 = S_{-\theta/2} S_0 = R_{2(-\theta/2-0)}$, d'où

$$S_0 R_\theta S_0^{-1} = R_{-\theta}$$

— conjuguer une rotation par une réflexion renverse le sens de rotation (une réflexion change l'orientation).

Réponse. $SO(2) \simeq \mathrm{U}$; $R_\theta S_0 \neq S_0 R_\theta$; $S_0 R_\theta S_0 = R_{-\theta}$.

Correction de l'exercice 12 – Isométries de déterminant -1 en dimension 3

a) $\det(-u) = (-1)^3 \det u = 1$ et $-u$ est orthogonale.

b) Si $\theta = \pi$, R est le demi-tour d'axe D et $-R$ vaut $-\mathrm{id}$ sur D et id sur $D^\perp$: c'est la réflexion par rapport à $D^\perp$. Si $\theta = 0$, $u = -\mathrm{id}$. Réciproquement, une réflexion a pour valeurs propres $(1,1,-1)$, d'où $\mathrm{tr}R = -\mathrm{tr}u = -1$ et $\theta = \pi$.

c) $u = -R = s_{D^\perp} \circ R_{\theta+\pi}$:

$$u = (\text{réflexion par rapport à } D^\perp) \circ (\text{rotation d'axe } D)$$

— composée commutative d'une rotation et de la réflexion par rapport au plan orthogonal à son axe.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Réponse. $u = -R$; réflexion ssi $\theta = \pi$; sinon composée d'une rotation et de la réflexion orthogonale à l'axe.

Correction de l'exercice 13 – Compacité du groupe orthogonal

a) $\|Q\|^2 = \operatorname{tr}(Q^{\mathsf{T}}Q) = \operatorname{tr} I = n$: $O(n)$ est inclus dans la sphère de rayon $\sqrt{n}$.

b) $\varphi : M \mapsto M^{\mathsf{T}}M$ est continue (polynomiale) et

$$O(n) = \varphi^{-1}(\{I\})$$

— image réciproque d'un fermé.

c) Fermé borné en dimension finie : compact. $SO(n) = O(n) \cap \det^{-1}(\{1\})$ est un fermé de ce compact, donc compact.

Réponse. $\|Q\| = \sqrt{n}$; $O(n) = \varphi^{-1}(\{I\})$ fermé ; compact, ainsi que $SO(n)$.

Correction de l'exercice 14 – Rotation qui envoie un vecteur sur un autre

a) $\|b\|^2 = \frac{1+4+4}{9} = 1$ et $\cos\alpha = \langle e_1, b\rangle = \frac{1}{3}$.

b) $w = e_1 \wedge b = \frac{1}{3}(0,-2,2)$ est orthogonal à e_1 et b ; la rotation d'axe $\frac{w}{\|w\|}$ agit dans le plan $\operatorname{Vect}(e_1, b)$ comme la rotation d'angle α, orientée de e_1 vers b (on a $\det(u, e_1, b) = \frac{\|w\|^2}{\|w\|} > 0$, donc $\sin\alpha > 0$). Ainsi

$$R(e_1) = \cos\alpha\, e_1 + \sin\alpha\, u \wedge e_1 = b$$

c) Si R_1 est une rotation d'axe e_1, $RR_1(e_1) = R(e_1) = b$: il y a une infinité de solutions (un cercle de rotations).

Réponse. $\cos\alpha = \frac{1}{3}$; rotation d'axe $e_1 \wedge b$ et d'angle α ; solutions RR_1, R_1 d'axe e_1.

Correction de l'exercice 15 – Synthèse : reconnaître une rotation de l'espace

a) Les colonnes $\frac{1}{3}(2,-2,1)$, $\frac{1}{3}(2,1,-2)$, $\frac{1}{3}(1,2,2)$ sont unitaires et orthogonales deux à deux ; le déterminant vaut 1 (calcul direct, ou $C_3 = C_1 \wedge C_2$).

b) $M(1,0,1) = \frac{1}{3}(2+1,-2+2,1+2) = (1,0,1)$: l'axe est $\mathbb{R}(1,0,1)$.

c) $\operatorname{tr} M = \frac{5}{3} = 1 + 2\cos\theta$, d'où $\cos\theta = \frac{1}{3}$. La partie antisymétrique $\frac{M - M^{\mathsf{T}}}{2}$ correspond au vecteur $\frac{1}{2}(m_{32}-m_{23}, m_{13}-m_{31}, m_{21}-m_{12}) = \frac{1}{2}\left(-\frac{4}{3}, 0, -\frac{4}{3}\right)$, égal à $\sin\theta\, u$:

$$\sin\theta \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1) = -\frac{2}{3}(1,0,1) \quad\Longrightarrow\quad \sin\theta = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

— ($\cos^2 + \sin^2 = \frac{1}{9} + \frac{8}{9} = 1$ ✓.) Rotation d'angle $-\arccos\frac{1}{3}$ autour de u.

d) $M^{\mathsf{T}} = M^{-1}$ est la rotation de même axe et d'angle opposé, $\arccos\frac{1}{3}$.

Réponse. Axe $\mathbb{R}(1,0,1)$, $\cos\theta = \frac{1}{3}$, $\sin\theta = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$ pour $u = \frac{(1,0,1)}{\sqrt{2}}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).