Plaquette 2 – Produits scalaires, inégalité de Cauchy-Schwarz et orthogonalité

Espaces euclidiens — Prépa MP / MPI (2e année)

Corrections détaillées

Boîte à outils

Produits scalaires usuels.

— $\mathbb{R}^n$: $\langle x, y\rangle = \sum x_i y_i = X^{\mathsf{T}}Y$; plus généralement $X^{\mathsf{T}}GY$ avec G symétrique définie positive.

— $M_n(\mathbb{R})$: $\langle A, B\rangle = \operatorname{tr}(A^{\mathsf{T}}B) = \sum a_{ij}b_{ij}$.

— $C([a,b])$: $\langle f, g\rangle = \int_a^b fg$; $\mathbb{R}_n[X]$: $\sum_{k=0}^{n} P(x_k)Q(x_k)$ (x_k distincts).

Cauchy-Schwarz et cas d'égalité :

$$|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|\,\|y\|, \quad \text{égalité} \Leftrightarrow x, y \text{ colinéaires}$$

— **Polarisation** : $\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right)$; **parallélogramme** : $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$.

— **Gram** : $G(x_1, \ldots, x_p) = \det(\langle x_i, x_j\rangle) \geq 0$, nul ssi la famille est liée.

Correction de l'exercice 1 – Le produit scalaire intégral

a) Bilinéarité et symétrie par linéarité de l'intégrale ; positivité car $f^2 \geq 0$. Si $\int_0^1 f^2 = 0$, la fonction **continue et positive** f^2 est nulle, donc $f = 0$.

b) La fonction f valant 1 en $\frac{1}{2}$ et 0 ailleurs est continue par morceaux, non nulle, et vérifie $\int_0^1 f^2 = 0$: la définition tombe.

c) Cauchy-Schwarz avec $g = 1$ ($\|1\| = 1$) :

$$\int_0^1 f \cdot 1 \leq \left(\int_0^1 f^2\right)^{1/2} \left(\int_0^1 1\right)^{1/2}$$

— Égalité si et seulement si f et 1 sont colinéaires : f constante.

Réponse. Produit scalaire grâce à la continuité ; $\left(\int_0^1 f\right)^2 \leq \int_0^1 f^2$, égalité ssi f constante.

Correction de l'exercice 2 – Produit scalaire par évaluation

a) Bilinéaire, symétrique, positif. Si $\sum P(x_k)^2 = 0$, alors P s'annule en $n+1$ points distincts avec $\deg P \leq n$: $P = 0$.

b) Non : $P = \prod_{k=0}^{n}(X - x_k)$ est non nul, de degré $n+1$, et $\langle P, P\rangle = 0$.

c) $L_i(x_k) = \delta_{ik}$, donc

$$\langle L_i, L_j\rangle = \sum_k L_i(x_k)L_j(x_k) = \sum_k \delta_{ik}\delta_{jk} = \delta_{ij}$$

Réponse. Produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$ (pas sur $\mathbb{R}_{n+1}[X]$) ; la base de Lagrange est orthonormée.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l’exercice 3 – Un produit scalaire non canonique sur $\mathbb{R}^2$

a) $G = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, symétrique. $\varphi(x,x) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2 = (x_1+x_2)^2 + x_2^2 \geq 0$, nul seulement si $x_2 = 0$ et $x_1 = 0$.

b) $\varphi(e_1,e_1) = 1$: $u_1 = e_1$. Puis $e_2 - \varphi(e_2,u_1)u_1 = (0,1) - (1,0) = (-1,1)$, et $\varphi((-1,1),(-1,1)) = 1 + 2 - 2 = 1$:

$$u_1 = (1,0), \qquad u_2 = (-1,1)$$

c) Dans la base (u_1,u_2), $x = (x_1+x_2)u_1 + x_2u_2$, d’où $\varphi(x,x) = (x_1+x_2)^2 + x_2^2$, ce qu’on retrouve par la forme canonique de a).

Réponse. $G = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$; base orthonormée $(1,0)$, $(-1,1)$; $\varphi(x,x) = (x_1+x_2)^2 + x_2^2$.

Correction de l’exercice 4 – Inégalités par Cauchy-Schwarz

a) Cauchy-Schwarz dans $\mathbb{R}^n$ avec (a_k) et $(1,\dots,1)$: $\sum a_k \leq \sqrt{n}\sqrt{\sum a_k^2}$.

b) Avec $u = (\sqrt{x_k})$ et $v = \left(\frac{1}{\sqrt{x_k}}\right)$: $\langle u,v\rangle = n$, d’où

$$n^2 \leq \left(\sum x_k\right)\left(\sum \frac{1}{x_k}\right)$$

— Égalité si et seulement si u et v sont colinéaires : x_k constant.

c) Avec $\left(\frac{1}{k}\right)$ et (a_k) : $\sum \frac{a_k}{k} \leq \sqrt{\sum \frac{1}{k^2}}\sqrt{\sum a_k^2}$ et $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leq \frac{\pi^2}{6}$.

Réponse. $\left(\sum a_k\right)^2 \leq n\sum a_k^2$; $\sum x_k \sum \frac{1}{x_k} \geq n^2$ (égalité ssi x_k constant).

Correction de l’exercice 5 – Calcul d’un orthogonal dans $\mathbb{R}^4$

a) $F^\perp = \{x \mid x_1 + x_2 = 0,\ x_2 + x_3 + x_4 = 0\}$.

b) Avec x_3, x_4 libres : $x_2 = -x_3 - x_4$, $x_1 = x_3 + x_4$. Base $g_1 = (1,-1,1,0)$, $g_2 = (1,-1,0,1)$. $\dim F + \dim F^\perp = 2 + 2 = 4$ ✓.

c) On cherche $x = af_1 + bf_2 + cg_1 + dg_2$. Projection sur F : $x_F = af_1 + bf_2$ avec $\langle x - x_F, f_i\rangle = 0$. Le système de Gram $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ donne $a = \frac{3}{5}$, $b = -\frac{1}{5}$:

$$x_F = \frac{1}{5}(3,2,-1,-1), \qquad x - x_F = \frac{1}{5}(2,-2,1,1) \in F^\perp$$

Réponse. $F^\perp = \mathrm{Vect}((1,-1,1,0),(1,-1,0,1))$; $x_F = \frac{1}{5}(3,2,-1,-1)$.

Correction de l’exercice 6 – Déterminant de Gram et distance

a) Si M est la matrice des coordonnées des x_i (en colonnes) dans une base orthonormée, alors $(\langle x_i,x_j\rangle) = M^{\mathsf{T}}M$ et, pour $Y \neq 0$, $Y^{\mathsf{T}}M^{\mathsf{T}}MY = \|MY\|^2 > 0$ (colonnes libres). Une matrice symétrique définie positive a un déterminant > 0.

b) $x = p_F(x) + h$ avec $h \perp F$. Par multilinéarité, on retranche à la dernière colonne une combinaison des autres (car $p_F(x) \in F$) : la dernière ligne et colonne deviennent $(0,\dots,0,\|h\|^2)$. Donc

$$G(x_1,\dots,x_p,x) = G(x_1,\dots,x_p)\|h\|^2$$

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

c) $G(x_1,x_2)=\begin{vmatrix}1&1\\1&2\end{vmatrix}=1$ et $G(x_1,x_2,x)=\begin{vmatrix}1&1&1\\1&2&2\\1&2&3\end{vmatrix}=1$: $d=1$ (le plan est $\{z=0\}$ ✓).

Réponse. $d(x,F)^2=\dfrac{G(x_1,\dots,x_p,x)}{G(x_1,\dots,x_p)}$; ici $d=1$.

Correction de l'exercice 7 – Une norme qui ne vient pas d'un produit scalaire

a) En développant $\|x\pm y\|^2=\|x\|^2\pm 2\langle x,y\rangle+\|y\|^2$ et en sommant :

$$\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=2\|x\|^2+2\|y\|^2$$

b) $x=(1,0)$, $y=(0,1)$: $\|x\pm y\|_\infty=1$, donc le membre de gauche vaut 2, celui de droite 4. L'identité est fausse.

c) $x=(1,0)$, $y=(0,1)$: $\|x\pm y\|_1=2$, gauche 8, droite 4. Faux également.

Réponse. Parallélogramme violé pour $(1,0)$ et $(0,1)$: $2\neq 4$ pour $\|\cdot\|_\infty$, $8\neq 4$ pour $\|\cdot\|_1$.

Correction de l'exercice 8 – Famille orthogonale en dimension infinie

a) $\cos(kt)\cos(lt)=\frac12[\cos((k-l)t)+\cos((k+l)t)]$, d'intégrale nulle sur $[0,2\pi]$ si $k\neq l$. $\|c_k\|^2=\pi$ pour $k\geq 1$ et $\|c_0\|^2=2\pi$.

b) Une famille orthogonale de vecteurs non nuls est libre : si $\sum a_k c_k=0$ (somme finie), le produit scalaire avec c_l donne $a_l\|c_l\|^2=0$. Une famille libre infinie impose $\dim E=+\infty$.

c) $\cos^3 t=\frac34\cos t+\frac14\cos 3t$: f est déjà dans le sous-espace, sa projection est elle-même :

$$p(f)=\frac34 c_1+\frac14 c_3$$

Réponse. $\langle c_k,c_l\rangle=0$ $(k\neq l)$, $\|c_k\|^2=\pi$; famille libre infinie ; $\cos^3=\frac34 c_1+\frac14 c_3$.

Correction de l'exercice 9 – Gram-Schmidt dans $\mathbb{R}^4$

a) $e_1=\frac12(1,1,1,1)$. $\langle v_2,e_1\rangle=1$, $v_2-e_1=\frac12(1,1,-1,-1)$, de norme 1 : $e_2=\frac12(1,1,-1,-1)$.

b) $\langle v_3,e_1\rangle=\langle v_3,e_2\rangle=\frac12$, donc

$$v_3-\frac12 e_1-\frac12 e_2=(1,0,0,0)-\frac14(2,2,0,0)=\frac12(1,-1,0,0)$$

— de norme $\frac{1}{\sqrt2}$: $e_3=\frac{1}{\sqrt2}(1,-1,0,0)$.

c) e_4 doit être orthogonal aux trois : $x_1+x_2+x_3+x_4=0$, $x_1+x_2=x_3+x_4$, $x_1=x_2$, d'où $e_4=\frac{1}{\sqrt2}(0,0,1,-1)$.

Réponse. $e_1=\frac12(1,1,1,1)$, $e_2=\frac12(1,1,-1,-1)$, $e_3=\dfrac{(1,-1,0,0)}{\sqrt2}$, $e_4=\dfrac{(0,0,1,-1)}{\sqrt2}$.

Correction de l'exercice 10 – Matrice de Gram et changement de base

a) $\langle\sum x_i b_i,\sum y_j b_j\rangle=\sum_{i,j}x_i y_j\langle b_i,b_j\rangle=X^{\mathsf T}GY$.

b) Les coordonnées se transforment par $X=PX'$, donc

$$\langle x,y\rangle=(PX')^{\mathsf T}G(PY')=X'^{\mathsf T}(P^{\mathsf T}GP)Y'$$

— et par unicité de la matrice d'une forme bilinéaire, $G'=P^{\mathsf T}GP$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

c) B' orthonormée $\Leftrightarrow G' = I$. En prenant pour B' une base orthonormée : $I = P^{\mathsf{T}} G P$, d'où $\det G = \dfrac{1}{(\det P)^2} > 0$.

Réponse. $\langle x, y\rangle = X^{\mathsf{T}} G Y$; $G' = P^{\mathsf{T}} G P$; $\det G > 0$.

Correction de l'exercice 11 – Représentation d'une forme linéaire

a) Théorème de représentation (Riesz) en dimension finie : $x \mapsto \langle \cdot, x\rangle$ est un isomorphisme de E sur son dual.

b) $R = a + bX$. Conditions : $\langle 1, R\rangle = a + \frac{b}{2} = 1$ et $\langle X, R\rangle = \frac{a}{2} + \frac{b}{3} = 0$. D'où $a = -\frac{2b}{3}$, $-\frac{b}{6} = 1$:

$$R = 4 - 6X$$

— Vérification : $\int_0^1 (4 - 6t)\,\mathrm{d}t = 1$ et $\int_0^1 t(4 - 6t)\,\mathrm{d}t = 2 - 2 = 0$ ✓.

c) Cauchy-Schwarz : $|P(0)| \le \|P\|\|R\|$ avec $\|R\|^2 = \int_0^1 (4 - 6t)^2 \mathrm{d}t = 16 - 24 + 12 = 4$.

Réponse. $R = 4 - 6X$; $\|R\| = 2$: $|P(0)| \le 2\|P\|$.

Correction de l'exercice 12 – Cauchy-Schwarz pour les fonctions

a) Cauchy-Schwarz avec $\sqrt{f}$ et $\dfrac{1}{\sqrt{f}}$:

$$1 = \left(\int_0^1 \sqrt{f} \cdot \frac{1}{\sqrt{f}}\right)^2 \le \int_0^1 f \int_0^1 \frac{1}{f}$$

b) Égalité si et seulement si $\sqrt{f}$ et $\dfrac{1}{\sqrt{f}}$ sont colinéaires, soit f constante.

c) $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{t}\,\mathrm{e}^t \le \left(\int_0^1 t\right)^{1/2} \left(\int_0^1 \mathrm{e}^{2t}\right)^{1/2} = \sqrt{\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{\mathrm{e}^2 - 1}{2}} = \sqrt{\frac{\mathrm{e}^2 - 1}{4}} \approx 1{,}26.$

Réponse. $\int f \int \frac{1}{f} \ge 1$, égalité ssi f constante ; majoration $\sqrt{\frac{\mathrm{e}^2 - 1}{4}}$.

Correction de l'exercice 13 – Matrices et produit scalaire de Frobenius

a) $(A^{\mathsf{T}} B)_{jj} = \sum_i a_{ij} b_{ij}$, et la trace somme sur j : c'est le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^{n^2}$.

b) Pour S symétrique et A antisymétrique : $\langle S, A\rangle = \mathrm{tr}(SA)$ et $\mathrm{tr}(SA) = \mathrm{tr}((SA)^{\mathsf{T}}) = \mathrm{tr}(A^{\mathsf{T}} S) = -\mathrm{tr}(AS) = -\mathrm{tr}(SA)$, donc 0. Avec $\dim S_n + \dim A_n = n^2$: $A_n = S_n^{\perp}$.

c) $\mathrm{tr}A = \langle I, A\rangle$ et $\|I\| = \sqrt{n}$:

$$|\mathrm{tr}A| \le \sqrt{n}\,\|A\|$$

— avec égalité si et seulement si A est colinéaire à I.

Réponse. $\langle A, B\rangle = \sum a_{ij} b_{ij}$; $A_n = S_n^{\perp}$; $|\mathrm{tr}A| \le \sqrt{n}\|A\|$.

Correction de l'exercice 14 – Orthogonal et inclusion

a) Si $x \perp G$, alors x est orthogonal à tout élément de $F \subset G$.

b) $x \perp F + G \Leftrightarrow x \perp F$ et $x \perp G$. Puis on applique cette égalité à $F^{\perp}$, $G^{\perp}$ et on passe à l'orthogonal (en dimension finie, $(H^{\perp})^{\perp} = H$) :

$$(F^{\perp} + G^{\perp})^{\perp} = F \cap G \quad\Longrightarrow\quad F^{\perp} + G^{\perp} = (F \cap G)^{\perp}$$

c) $F \cap G = \mathbb{R}e_2$, d'orthogonal $\mathrm{Vect}(e_1, e_3)$. Et $F^{\perp} = \mathbb{R}e_3$, $G^{\perp} = \mathbb{R}e_1$, de somme $\mathrm{Vect}(e_1, e_3)$

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

✓.

Réponse. $(F+G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$, $(F\cap G)^\perp = F^\perp + G^\perp$.

Correction de l'exercice 15 – Synthèse : un produit scalaire sur les polynômes par les dérivées

a) Bilinéaire, symétrique, positif. Si $\sum P^{(k)}(0)^2 = 0$, toutes les dérivées en 0 sont nulles et, par la formule de Taylor, $P = \sum \frac{P^{(k)}(0)}{k!}X^k = 0$.

b) $\left(\frac{X^k}{k!}\right)^{(j)}(0) = \delta_{jk}$, donc $\left|\frac{X^k}{k!}, \frac{X^l}{l!}\right| = \sum_j \delta_{jk}\delta_{jl} = \delta_{kl}$.

c) $X^n = n!\cdot\frac{X^n}{n!}$ est orthogonal à $\mathbb{R}_{n-1}[X] = \mathrm{Vect}\left(\frac{X^k}{k!}\right)_{k<n}$, donc

$$d(X^n, \mathbb{R}_{n-1}[X]) = \|X^n\| = n!$$

d) $(1+X)^n = \sum \binom{n}{k} X^k = \sum_k \binom{n}{k} k!\frac{X^k}{k!}$, d'où $\|(1+X)^n\|^2 = \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{n!}{(n-k)!}\right)^2$ (Parseval). Pour $n=2$: $1+4+4=9$.

Réponse. Base orthonormée $\frac{X^k}{k!}$; $d(X^n,\mathbb{R}_{n-1}[X]) = n!$; $\|(1+X)^n\|^2 = \sum\left(\frac{n!}{(n-k)!}\right)^2$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).