Plaquette 3 – Projections orthogonales, distances et moindres carrés

Espaces euclidiens — Prépa MP / MPI (2e année)

Corrections détaillées

Boîte à outils

Projection orthogonale.

— $p_F(x) = \sum_i \langle x, e_i\rangle e_i$ pour (e_i) base orthonormée de F.

— Si F a pour base les colonnes de A : matrice de p_F

$$P = A(A^{\mathsf T}A)^{-1}A^{\mathsf T}$$

— Droite $\mathbb{R}u$: $P = \dfrac{uu^{\mathsf T}}{\|u\|^2}$; hyperplan $n^\perp$: $P = I - \dfrac{nn^{\mathsf T}}{\|n\|^2}$.

— **Pythagore** : $\|x\|^2 = \|p_F(x)\|^2 + d(x,F)^2$.

— Un projecteur p est orthogonal $\Leftrightarrow$ p symétrique $\Leftrightarrow$ $\|p(x)\| \le \|x\|$ pour tout x.

— **Moindres carrés** : $\min \|AX - b\|$ est atteint pour $A^{\mathsf T}AX = A^{\mathsf T}b$.

Correction de l’exercice 1 – Projection sur une droite et sur un plan

a) $\|u\|^2 = 9$ et

$$P_D = \frac{uu^{\mathsf T}}{9} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 4 \\ 2 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

b) $P_P = I - P_D = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 8 & -2 & -2 \\ -2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$ et la réflexion vaut $S = I - 2P_D = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 7 & -4 & -4 \\ -4 & 1 & -8 \\ -4 & -8 & 1 \end{pmatrix}$.

c) $P_D x = \frac{1}{3}(1,2,2)$ et $P_P x = \frac{1}{3}(8,-2,-2)$. Contrôle : la somme vaut $(3,0,0)$ et $\langle (8,-2,-2),(1,2,2)\rangle = 0$ ✓.

Réponse. $P_D = \frac{1}{9}uu^{\mathsf T}$, $P_P = I - P_D$; $P_D x = \frac{1}{3}(1,2,2)$, $P_P x = \frac{1}{3}(8,-2,-2)$.

Correction de l’exercice 2 – Matrice de projection sur un plan donné par une base

a) $A^{\mathsf T}A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, d’inverse $\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, puis

$$P = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

b) $n = (1,1,-1)$ est orthogonal aux deux vecteurs ; $I - \dfrac{nn^{\mathsf T}}{3}$ redonne la même matrice.

c) $P^{\mathsf T} = P$ se lit. $P^2 = A(A^{\mathsf T}A)^{-1}(A^{\mathsf T}A)(A^{\mathsf T}A)^{-1}A^{\mathsf T} = P$. (Contrôle : $\operatorname{tr} P = 2 = \dim F$.)

Réponse. $P = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = I - \frac{1}{3}nn^{\mathsf T}$, $n = (1,1,-1)$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l'exercice 3 – Projecteurs orthogonaux : trois caractérisations

a) $\langle p(x), y\rangle = \langle p(x), p(y) + (y - p(y))\rangle = \langle p(x), p(y)\rangle$ car $y - p(y) \in \ker p \perp \mathrm{Im} p$; de même $\langle x, p(y)\rangle = \langle p(x), p(y)\rangle$.

b) $y \in \mathrm{Im} p$, $z \in \ker p$: $\langle y, z\rangle = \langle p(y), z\rangle = \langle y, p(z)\rangle = 0$.

c) Sens direct : Pythagore. Réciproque : pour $x = y + tz$, $p(x) = y$, et

$$\|y\|^2 \le \|y\|^2 + 2t\langle y, z\rangle + t^2\|z\|^2 \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

— Le trinôme $2t\langle y, z\rangle + t^2\|z\|^2$ reste positif, ce qui impose $\langle y, z\rangle = 0$: $\ker p \perp \mathrm{Im} p$.

Réponse. Orthogonal $\Leftrightarrow$ symétrique $\Leftrightarrow \|p(x)\| \le \|x\|$.

Correction de l'exercice 4 – Droite des moindres carrés

a) $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, $Y = (1, 3, 4, 4)$.

b) $M^{\mathsf T}M = \begin{pmatrix} 14 & 6 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$ et $M^{\mathsf T}Y = (23, 12)$. Le système $14a + 6b = 23$, $6a + 4b = 12$ donne

$$a = 1, \qquad b = \frac{3}{2}$$

c) Résidus $y_i - (x_i + \frac{3}{2})$: $-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$. Somme nulle (orthogonal à la colonne de 1) et $0 \cdot (-\frac{1}{2}) + 1 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{2} + 3 \cdot (-\frac{1}{2}) = 0$ ✓. Erreur quadratique minimale : $4 \times \frac{1}{4} = 1$.

Réponse. $y = x + \frac{3}{2}$; résidus $\pm\frac{1}{2}$, erreur quadratique 1.

Correction de l'exercice 5 – Système surdéterminé

a) Les deux premières équations donnent $x = y = \frac{1}{2}$, et alors $2x + y = \frac{3}{2} \neq 2$.

b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $A^{\mathsf T}A = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $A^{\mathsf T}b = (5, 3)$. Équations normales : $6x + 2y = 5$, $2x + 3y = 3$, d'où

$$x = \frac{9}{14}, \qquad y = \frac{4}{7}$$

c) Résidus $b - AX = \left(-\frac{3}{14}, -\frac{1}{14}, \frac{1}{7}\right)$, d'où $\|AX - b\|^2 = \frac{9 + 1 + 4}{196} = \frac{1}{14}$.

Réponse. $(x, y) = \left(\frac{9}{14}, \frac{4}{7}\right)$; erreur $\frac{1}{14}$.

Correction de l'exercice 6 – Approximation de l'exponentielle par une fonction affine

a) Vu par Gram-Schmidt ($\|X - \frac{1}{2}\|^2 = \frac{1}{12}$).

b) $\langle f, e_0\rangle = \int_0^1 \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t = \mathrm{e} - 1$. Par parties, $\int_0^1 t\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t = 1$, donc $\int_0^1 \left(t - \frac{1}{2}\right)\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t = 1 - \frac{\mathrm{e} - 1}{2} = \frac{3 - \mathrm{e}}{2}$ et $\langle f, e_1\rangle = \sqrt{3}\,(3 - \mathrm{e})$.

c) $p(f) = \langle f, e_0\rangle e_0 + \langle f, e_1\rangle e_1$:

$$p(f)(t) = (\mathrm{e} - 1) + 6(3 - \mathrm{e})\left(t - \frac{1}{2}\right) \approx 1{,}718 + 1{,}690\left(t - \frac{1}{2}\right)$$

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Réponse. $p(f) = (\mathrm{e}-1) + 6(3-\mathrm{e})\left(t - \frac{1}{2}\right)$.

Correction de l'exercice 7 – Distance d'une matrice aux symétriques

a) $M = \frac{M+M^{\mathsf{T}}}{2} + \frac{M-M^{\mathsf{T}}}{2}$ avec le premier terme dans S_n et le second dans $A_n = S_n^{\perp}$.

b) $d(M, S_n) = \frac{M-M^{\mathsf{T}}}{2}$.

c) $\frac{M-M^{\mathsf{T}}}{2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, de norme $\sqrt{2}$. Pour $H = I^{\perp}$: la distance est la norme de la projection sur $\mathbb{R}I$,

$$d(M, H) = \frac{|\langle M, I\rangle|}{\|I\|} = \frac{|\mathrm{tr} M|}{\sqrt{n}} = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$$

Réponse. $p(M) = \frac{M+M^{\mathsf{T}}}{2}$; $d(M, S_2) = \sqrt{2}$, $d(M, H) = 2\sqrt{2}$.

Correction de l'exercice 8 – Un minimum par polynôme orthogonal

a) $aX^2 + bX + c$ décrit $\mathbb{R}_2[X]$.

b) Le minimum est atteint en $p(X^3)$, et $Q = X^3 - p(X^3)$ est unitaire, orthogonal à $\mathbb{R}_2[X]$.

c) On vérifie $\int_0^1 Q = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} + \frac{3}{10} - \frac{1}{20} = 0$, $\int_0^1 tQ = \frac{1}{5} - \frac{3}{8} + \frac{1}{5} - \frac{1}{40} = 0$ et $\int_0^1 t^2 Q = \frac{1}{6} - \frac{3}{10} + \frac{3}{20} - \frac{1}{60} = 0$. Puis $m = \|Q\|^2 = \langle Q, X^3\rangle$:

$$m = \frac{1}{7} - \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{6} + \frac{3}{5}\cdot\frac{1}{5} - \frac{1}{20}\cdot\frac{1}{4} = \frac{1}{2800}$$

Réponse. $Q = X^3 - \frac{3}{2}X^2 + \frac{3}{5}X - \frac{1}{20}$; $m = \frac{1}{2800}$.

Correction de l'exercice 9 – Pythagore et projection

a) $x = p_F(x) + (x - p_F(x))$, somme orthogonale.

b) Pour $y \in F$: $x - y = (x - p_F(x)) + (p_F(x) - y)$ avec le second terme dans F, d'où

$$\|x - y\|^2 = d(x, F)^2 + \|p_F(x) - y\|^2$$

— minimal si et seulement si $y = p_F(x)$.

c) $d(x, F) = \frac{|1+2+3|}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}$, donc $\|p_F(x)\|^2 = 14 - 12 = 2$ et $\|p_F(x)\| = \sqrt{2}$ (en effet $p_F(x) = (-1, 0, 1)$).

Réponse. $\|x\|^2 = \|p_F(x)\|^2 + d(x, F)^2$; $\|p_F(x)\| = \sqrt{2}$.

Correction de l'exercice 10 – Symétrie orthogonale par rapport à une droite de l'espace

a) $p_D = \frac{1}{3}J$, donc $S = \frac{2}{3}J - I = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

b) $S^{\mathsf{T}} = S$ et $S^2 = \frac{4}{9}J^2 - \frac{4}{3}J + I = \frac{4}{3}J - \frac{4}{3}J + I = I$: S est orthogonale. Valeurs propres 1 (sur D) et -1 (double, sur $D^{\perp}$) :

$$\det S = 1 \times (-1)^2 = 1$$

c) $S \in SO(3)$, d'axe D (vecteurs fixes), et $\mathrm{tr} S = -1 = 1 + 2\cos\theta$ donne $\theta = \pi$: c'est le

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

demi-tour d'axe D.

Réponse. $S = \frac{2}{3}J - I$; $\det S = 1$; demi-tour d'axe $\mathbb{R}(1,1,1)$.

Correction de l'exercice 11 – Somme de deux projecteurs orthogonaux

a) Pour $x = y + z + w$ avec $y \in F$, $z \in G$, $w \in (F \oplus G)^\perp$: $p_F(x) = y$, $p_G(x) = z$ (car $G \perp F$ et $w \perp F, G$), donc $(p_F + p_G)(x) = y + z = p_{F \oplus G}(x)$.

b) $q^2 = p_F + p_G + p_F p_G + p_G p_F = q$ donne $p_F p_G + p_G p_F = 0$. En composant à gauche puis à droite par p_F : $p_F p_G + p_F p_G p_F = 0$ et $p_F p_G p_F + p_G p_F = 0$. Par différence, $p_F p_G = p_G p_F$, puis $2 p_F p_G = 0$.

c) Pour $y \in G$: $p_F(y) = p_F p_G(y) = 0$, donc $y \in F^\perp$:

$$G \subset F^\perp$$

Réponse. $p_F + p_G$ projecteur $\Leftrightarrow F \perp G$, et alors $p_F + p_G = p_{F \oplus G}$.

Correction de l'exercice 12 – Inégalité de Bessel sur des fonctions

a) Par parties : $\int_{-\pi}^{\pi} t \sin(kt)\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{t\cos kt}{k}\right]_{-\pi}^{\pi} + \int \frac{\cos kt}{k} = -\frac{2\pi(-1)^k}{k}$. Donc $b_k = \frac{2(-1)^{k+1}}{k}$.

b) $\sum_{k=1}^{n} b_k^2 \leq \|f\|^2 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t^2\,\mathrm{d}t = \frac{2\pi^2}{3}$, soit

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{4}{k^2} \leq \frac{2\pi^2}{3}$$

c) En divisant par 4 et en faisant $n \to +\infty$: $\sum \frac{1}{k^2} \leq \frac{\pi^2}{6}$ (il y a en fait égalité, par Parseval).

Réponse. $b_k = \frac{2(-1)^{k+1}}{k}$; Bessel : $\sum \frac{1}{k^2} \leq \frac{\pi^2}{6}$.

Correction de l'exercice 13 – Projection et matrice de Gram

a) $x - \sum \lambda_i f_i \perp f_j$ pour tout j s'écrit $\sum_i \lambda_i \langle f_i, f_j\rangle = \langle x, f_j\rangle$.

b) $G = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$ (car $\int_{-1}^{1} t\,\mathrm{d}t = 0$), et $\langle X^3, 1\rangle = 0$, $\langle X^3, X\rangle = \frac{2}{5}$. Donc $\lambda_0 = 0$, $\lambda_1 = \frac{2/5}{2/3} = \frac{3}{5}$:

$$p(X^3) = \frac{3}{5}X$$

c) $X^3 - \frac{3}{5}X$ est impair, donc orthogonal à 1 ; et $\int_{-1}^{1}\left(t^4 - \frac{3}{5}t^2\right)\mathrm{d}t = \frac{2}{5} - \frac{2}{5} = 0$ ✓.

Réponse. Équations normales $G\lambda = (\langle x, f_j\rangle)$; $p(X^3) = \frac{3}{5}X$.

Correction de l'exercice 14 – Distance à un sous-espace défini par des équations

a) $F^\perp = \mathrm{Vect}(n_1, n_2)$ avec $n_1 = (1,1,1,1)$ et $n_2 = (1,-1,1,-1)$, orthogonaux ($1 - 1 + 1 - 1 = 0$), de normes au carré 4.

b) $\langle a, n_1\rangle = 10$, $\langle a, n_2\rangle = -2$, donc

$$p_{F^\perp}(a) = \frac{10}{4}n_1 - \frac{2}{4}n_2 = (2,3,2,3)$$

— et $d(a,F) = \|(2,3,2,3)\| = \sqrt{26}$.

c) $p_F(a) = a - p_{F^\perp}(a) = (-1,-1,1,1)$, qui vérifie bien les deux équations (0 et

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$-1+1+1-1=0$).

Réponse. $p_{F^\perp}(a)=(2,3,2,3)$; $d(a,F)=\sqrt{26}$; $p_F(a)=(-1,-1,1,1)$.

Correction de l’exercice 15 – Synthèse : régression parabolique

a) $M=\begin{pmatrix}1&-1&1\\0&0&1\\1&1&1\\4&2&1\end{pmatrix}$, $Y=(1,0,1,3)$, et

$$M^{\mathrm{T}}M=\begin{pmatrix}18&8&6\\8&6&2\\6&2&4\end{pmatrix},\qquad M^{\mathrm{T}}Y=(14,6,5)$$

b) La résolution donne $a=\frac{3}{4}$, $b=-\frac{1}{20}$, $c=\frac{3}{20}$.

c) Valeurs ajustées : $\frac{19}{20}$, $\frac{3}{20}$, $\frac{17}{20}$, $\frac{61}{20}$; résidus $\frac{1}{20}$, $-\frac{3}{20}$, $\frac{3}{20}$, $-\frac{1}{20}$. Somme nulle ; somme des $x_i r_i$: $-\frac{1}{20}+0+\frac{3}{20}-\frac{2}{20}=0$; somme des $x_i^2 r_i$: $\frac{1}{20}+\frac{3}{20}-\frac{4}{20}=0$ ✓. Erreur $\frac{1+9+9+1}{400}=\frac{1}{20}$.

d) MX est le projeté orthogonal de Y sur le sous-espace $\mathrm{Im}M\subset\mathbb{R}^4$ des « vecteurs paraboliques » ; le résidu est orthogonal à ce sous-espace.

Réponse. $y=\frac{3}{4}x^2-\frac{1}{20}x+\frac{3}{20}$; erreur minimale $\frac{1}{20}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).