Plaquette 4 – Adjoint, endomorphismes symétriques et antisymétriques

Espaces euclidiens — Prépa MP / MPI (2e année)

Exercices

Méthode

L'**adjoint** u^* est défini par $\langle u(x), y\rangle = \langle x, u^*(y)\rangle$. En base **orthonormée**, sa matrice est la transposée ; en base quelconque de Gram G, c'est $G^{-1}A^{\mathsf{T}}G$. Les relations d'orthogonalité ($\ker u^* = (\mathrm{Im}\, u)^{\perp}$, stabilité de $F^{\perp}$ par u^*) se démontrent en une ligne à partir de la définition. Un endomorphisme **antisymétrique** vérifie $\langle u(x), x\rangle = 0$: il « tourne » chaque vecteur à angle droit, n'a que 0 comme valeur propre réelle et un rang pair ; son exponentielle est une rotation.

Exercice 1 – Adjoint en base non orthonormée

Sur $\mathbb{R}^2$ muni de $\langle x, y\rangle = X^{\mathsf{T}}GY$, $G = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, soit u de matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ dans la base canonique.

a) Montrer que la matrice de u^* dans la base canonique est $G^{-1}A^{\mathsf{T}}G$.

b) La calculer.

c) u est-il symétrique pour ce produit scalaire ? Interpréter : u est le projecteur sur $\mathbb{R}e_1$ parallèlement à $\mathbb{R}e_2$.

Exercice 2 – Noyau et image de l'adjoint

Soit $u \in L(E)$, E euclidien.

a) Montrer que $\ker u^* = (\mathrm{Im}\, u)^{\perp}$.

b) En déduire $\mathrm{Im}\, u^* = (\ker u)^{\perp}$ et $\mathrm{rg}\, u^* = \mathrm{rg}\, u$.

c) Montrer que $E = \ker u \oplus \mathrm{Im}\, u^*$ (somme orthogonale) et l'illustrer avec les matrices $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 3 – Sous-espaces stables et adjoint

Soit $u \in L(E)$ et F un sous-espace stable par u.

a) Montrer que $F^{\perp}$ est stable par u^*.

b) En déduire que si u est symétrique, l'orthogonal d'un stable est stable.

c) Montrer par l'exemple $u = E_{12}$ sur $\mathbb{R}^2$ que l'orthogonal d'un stable n'est pas stable par u en général.

Exercice 4 – Endomorphismes antisymétriques

Soit $u \in L(E)$.

a) Montrer que u est antisymétrique si et seulement si $\langle u(x), x\rangle = 0$ pour tout x.

b) Montrer que la seule valeur propre réelle possible d'un antisymétrique est 0.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

c) Montrer que $\ker u \perp \mathrm{Im} u$, puis que u induit un automorphisme antisymétrique de $\mathrm{Im} u$. En déduire que $\mathrm{rg} u$ est pair.

Exercice 5 – Antisymétriques de R³ et produit vectoriel

Soit $w = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ et $u_w : x \mapsto w \wedge x$.

a) Écrire la matrice de u_w dans la base canonique et vérifier qu'elle est antisymétrique.

b) Montrer que toute matrice antisymétrique de $M_3(\mathbb{R})$ est de cette forme.

c) Déterminer $\ker u_w$ et $\mathrm{Im} u_w$ pour $w \neq 0$.

Exercice 6 – Un opérateur différentiel symétrique

Sur $\mathbb{R}_n[X]$ muni de $\langle P, Q \rangle = \int_{-1}^{1} PQ$, on pose $L(P) = ((1 - X^2)P')'$.

a) Montrer que L est symétrique (intégrer par parties).

b) Montrer que $\langle L(P), P \rangle \leq 0$.

c) Calculer $L(X^k)$ et en déduire les valeurs propres de L.

Exercice 7 – Norme d'opérateur et u*u

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ et $\|A\| = \sup_{\|X\| = 1} \|AX\|$ (norme euclidienne).

a) Montrer que $A^{\mathsf{T}}A$ est symétrique positive et que $\|AX\|^2 = X^{\mathsf{T}}A^{\mathsf{T}}AX$.

b) En diagonalisant $A^{\mathsf{T}}A$ en base orthonormée, montrer que $\|A\|^2$ est sa plus grande valeur propre.

c) Calculer $\|A\|$ pour $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 8 – Endomorphismes normaux

On dit que u est **normal** si $uu^* = u^*u$.

a) Montrer que u normal $\Leftrightarrow \|u(x)\| = \|u^*(x)\|$ pour tout x.

b) En déduire que $\ker u = \ker u^*$ et que, pour u normal, $\ker(u - \lambda \,\mathrm{id}) = \ker(u^* - \lambda \,\mathrm{id})$.

c) Les rotations, les symétriques, les antisymétriques sont-ils normaux ? Et $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$?

Exercice 9 – Symétrique et orthogonal

Soit $u \in L(E)$ à la fois symétrique et orthogonal.

a) Montrer que $u^2 = \mathrm{id}$.

b) En déduire que u est une symétrie orthogonale (par rapport à $\ker(u - \mathrm{id})$).

c) Réciproquement, montrer qu'une symétrie s ($s^2 = \mathrm{id}$) est orthogonale si et seulement si elle est symétrique.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 10 – Adjoint d'un endomorphisme de rang 1

Soit $a, b \in E$ non nuls et $u(x) = \langle a, x\rangle b$.

a) Déterminer u^*.

b) À quelle condition u est-il symétrique ? antisymétrique ?

c) Calculer u^2 et en déduire que u est diagonalisable si et seulement si $\langle a, b\rangle \neq 0$.

Exercice 11 – La transformée de Cayley

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ antisymétrique.

a) Montrer que $I + A$ est inversible (utiliser $X^{\mathsf{T}}AX = 0$).

b) Montrer que $Q = (I - A)(I + A)^{-1}$ est orthogonale.

c) Calculer Q pour $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et pour $A = \begin{pmatrix} 0 & -t \\ t & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 12 – Exponentielle d'une antisymétrique

Soit A antisymétrique.

a) Montrer que $\exp(A)^{\mathsf{T}} = \exp(-A)$ et en déduire $\exp(A) \in O(n)$.

b) Montrer que $\det \exp(A) = 1$.

c) Calculer $\exp(tJ)$ pour $J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 13 – Forme quadratique associée

Soit u symétrique et $q(x) = \langle u(x), x\rangle$.

a) Montrer que $\langle u(x), y\rangle = \frac{1}{4}(q(x + y) - q(x - y))$.

b) En déduire que deux endomorphismes symétriques de même forme quadratique sont égaux.

c) Montrer que le résultat est faux sans symétrie : donner $u \neq 0$ avec $q = 0$.

Exercice 14 – Adjoint de la dérivation pour un poids

Sur $E = \mathbb{R}_n[X]$ muni de $\langle P, Q\rangle = \int_0^{+\infty} P(t)Q(t)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$, soit $D : P \mapsto P'$.

a) Justifier que l'intégrale converge et définit un produit scalaire.

b) Montrer que $\langle D(P), Q\rangle = -P(0)Q(0) + \langle P, Q - Q'\rangle$.

c) D admet-il un adjoint de la forme $Q \mapsto Q - Q'$? Commenter.

Exercice 15 – Synthèse : un symétrique de rang 1

Soit $u = (1, 2, 1)$ et $A = uu^{\mathsf{T}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Montrer que $A = 6p$ où p est le projecteur orthogonal sur $\mathbb{R}u$.

b) Donner $\ker A$, $\mathrm{Im} A$, et vérifier qu'ils sont orthogonaux.

c) Calculer A^n, $\exp(A)$ et $\|A\|$ (norme subordonnée euclidienne).

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

d) Calculer la distance de $x = (1, 0, 0)$ à $\ker A$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).