Plaquette 1 – Bases orthonormées, projections, adjoint et groupe orthogonal

Espaces euclidiens — Prépa MP / MPI (2e année)

Exercices

Méthode

On construit des **bases orthonormées**, on calcule des **projections orthogonales** et des distances, on manipule l'**adjoint** u^*, et on décrit les **isométries** du plan et de l'espace.

Exercice 1 – Base orthonormée

Construire une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$ à partir de $u_1 = (1, 1, 1)$ et $u_2 = (1, 0, -1)$, puis compléter.

Exercice 2 – Projection et distance

Dans $\mathbb{R}^3$, calculer la distance du point $A(1, 2, 3)$ au plan P d'équation $x - y + 2z = 0$.

Exercice 3 – Adjoint

Dans $\mathbb{R}^2$ euclidien canonique, déterminer l'adjoint de u de matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, et vérifier la relation de définition sur un exemple.

Exercice 4 – Matrice orthogonale

La matrice $Q = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ est-elle orthogonale ? Si oui, rotation ou non ?

Exercice 5 – Rotation du plan

Déterminer la matrice de la rotation d'angle $\frac{\pi}{3}$ dans le plan euclidien, puis son ordre dans $SO(2)$.

Exercice 6 – Réflexion

Déterminer la matrice de la réflexion du plan par rapport à la droite d'équation $y = 2x$.

Exercice 7 – Endomorphisme symétrique

Soit u symétrique. Montrer que ses sous-espaces propres associés à des valeurs propres distinctes sont **orthogonaux**.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 8 – Matrice de Gram

Calculer la matrice de Gram de $((1,1,0),(1,0,1))$ et en déduire l'aire du parallélogramme qu'ils engendrent.

Exercice 9 – Meilleure approximation

Dans $\mathbb{R}^3$, déterminer le point du plan $F = \mathrm{Vect}((1,0,1),(0,1,1))$ le plus proche de $b = (1,1,0)$.

Exercice 10 – Isométries de l'espace

Soit $u \in SO(3)$ avec $\mathrm{tr}(u) = 0$. Déterminer l'angle de la rotation et donner un exemple.

Exercice 11 – Inégalité de Bessel

Soit (e_1, e_2) une famille orthonormée de $\mathbb{R}^3$ et $x \in \mathbb{R}^3$. Montrer que $\langle x, e_1\rangle^2 + \langle x, e_2\rangle^2 \leq \|x\|^2$, et préciser le cas d'égalité.

Exercice 12 – Gram-Schmidt sur les polynômes

Sur $\mathbb{R}_2[X]$, on pose $\langle P, Q\rangle = \int_0^1 P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t$.

a) Orthonormaliser la base $(1, X, X^2)$ par le procédé de Gram-Schmidt.

b) En déduire la projection orthogonale de X^2 sur $\mathbb{R}_1[X]$.

c) Calculer $\min_{a,b} \int_0^1 (t^2 - at - b)^2\,\mathrm{d}t$.

Exercice 13 – Distance à un hyperplan

Dans $\mathbb{R}^3$ euclidien canonique, soit $H = \{x + 2y - 2z = 0\}$ et $a = (1,1,1)$.

a) Donner un vecteur normal n à H et la formule $d(a,H) = \dfrac{|\langle a, n\rangle|}{\|n\|}$.

b) Calculer $d(a,H)$ et le projeté orthogonal $p_H(a)$.

c) Vérifier que $p_H(a) \in H$ et que $a - p_H(a)$ est colinéaire à n.

Exercice 14 – Matrice d'une réflexion de l'espace

Soit s la réflexion (symétrie orthogonale) par rapport au plan $H = \{x + 2y - 2z = 0\}$.

a) Montrer que $s(x) = x - 2\dfrac{\langle x, n\rangle}{\|n\|^2} n$ avec $n = (1, 2, -2)$.

b) En déduire la matrice S de s dans la base canonique.

c) Vérifier que S est symétrique et orthogonale, et calculer $\mathrm{tr}S$ et $\det S$.

Exercice 15 – Synthèse : moindres carrés

On cherche la droite $y = ax + b$ ajustant au mieux les points $(0,1)$, $(1,2)$, $(2,2)$ au sens des moindres carrés.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).