Plaquette 5 – Isométries vectorielles : groupe orthogonal, rotations, réflexions

Espaces euclidiens — Prépa MP / MPI (2e année)

Exercices

Méthode

Pour **reconnaître** une matrice orthogonale M de taille 3 : on vérifie $M^{\mathsf{T}}M = I$ (colonnes orthonormées), on calcule $\det M = \pm 1$. Si $\det M = 1$, c'est une **rotation** : l'axe est $\ker(M - I)$, l'angle vérifie $\operatorname{tr} M = 1 + 2\cos\theta$, et le signe de $\sin\theta$ se lit sur la partie antisymétrique $\frac{M - M^{\mathsf{T}}}{2}$ (ou sur $\det(u, x, Mx)$). Si $\det M = -1$, $-M$ est une rotation ; si de plus M est symétrique, c'est une **réflexion** par rapport au plan $\ker(M - I)$. Les **réflexions** engendrent le groupe orthogonal, et celle qui échange deux vecteurs de même norme s'écrit explicitement (Householder).

Exercice 1 – Classification des matrices orthogonales 2 × 2

a) Montrer que toute $M \in O(2)$ s'écrit R_θ ou S_α (écrire la première colonne $(\cos\varphi, \sin\varphi)$).

b) Montrer que S_α est la réflexion par rapport à la droite d'angle polaire α.

c) Calculer $S_\alpha S_\beta$ et $R_\theta S_\alpha$.

Exercice 2 – Reconnaître une réflexion de l'espace

Soit $M = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Montrer que M est orthogonale et symétrique.

b) Calculer $\det M$ et $\operatorname{tr} M$, et en déduire le spectre.

c) Identifier M géométriquement.

Exercice 3 – Matrice d'une rotation par la formule de Rodrigues

Soit $u = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0)$ et R la rotation d'axe dirigé par u et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

a) Écrire uu^{T} et $[u]_\wedge$.

b) En déduire la matrice R.

c) Vérifier $Ru = u$, $\operatorname{tr} R = 1$ et $R^{\mathsf{T}}R = I$ sur une colonne.

Exercice 4 – Conservation de la norme et du produit scalaire

Soit $u \in L(E)$.

a) Montrer que si $\|u(x)\| = \|x\|$ pour tout x, alors u conserve le produit scalaire.

b) En déduire que $u^* u = \mathrm{id}$ et que u est bijective.

c) Montrer qu'une application linéaire qui conserve l'orthogonalité n'est pas forcément orthogonale, mais qu'elle est proportionnelle à une isométrie (admettre que $\|u(e_i)\|$ est constant sur une base orthonormée).

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 5 – Réflexion de Householder

Soit $x = (3, 4, 0)$ et $y = (5, 0, 0)$.

a) Vérifier $\|x\| = \|y\|$ et poser $n = x - y$.

b) Écrire la matrice de la réflexion s de vecteur normal n et vérifier $s(x) = y$.

c) Expliquer comment ces réflexions permettent de trianguliariser une matrice par blocs orthogonaux (méthode de Householder).

Exercice 6 – Décomposition QR

Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$.

a) Orthonormaliser les colonnes de A par Gram-Schmidt.

b) En déduire $A = QR$ avec Q orthogonale et R triangulaire supérieure à diagonale positive.

c) Vérifier que $\det A = \det R$ et en déduire l'unicité de la décomposition pour A inversible (admise).

Exercice 7 – Matrices orthogonales triangulaires ou entières

a) Montrer qu'une matrice orthogonale triangulaire supérieure est diagonale, à coefficients ± 1.

b) Montrer que les matrices orthogonales à coefficients entiers sont les matrices de permutation « signées ».

c) Combien y en a-t-il dans $O(n)$? Les décrire pour $n = 2$.

Exercice 8 – Valeurs propres et déterminant d'une isométrie

Soit $u \in O(E)$.

a) Montrer que les valeurs propres réelles de u sont ± 1 et que $\det u = \pm 1$.

b) Montrer que si F est stable par u, alors $F^{\perp}$ aussi.

c) En déduire qu'en dimension 3, une isométrie de déterminant 1 admet 1 comme valeur propre et laisse stable le plan orthogonal à son axe.

Exercice 9 – Orientation de l'angle d'une rotation

Soit R une rotation de $\mathbb{R}^3$ d'axe dirigé par u unitaire et d'angle θ.

a) Montrer que pour $x \perp u$ unitaire, $R(x) = \cos\theta\, x + \sin\theta\, u \wedge x$.

b) En déduire que $\det(u, x, R(x)) = \sin\theta$.

c) Application à la permutation circulaire P ($Pe_1 = e_2$, $Pe_2 = e_3$, $Pe_3 = e_1$) avec $u = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)$.

Exercice 10 – Les réflexions engendrent le groupe orthogonal

a) Montrer que si $u \in O(E)$ fixe un vecteur unitaire a, il laisse stable $a^{\perp}$.

b) Montrer par récurrence sur n que toute isométrie est un produit d'au plus n réflexions (si $u(a) \neq a$, composer par la réflexion échangeant a et $u(a)$).

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

c) En déduire le déterminant d'un produit de k réflexions, et le nombre minimal de réflexions pour une rotation de $\mathbb{R}^3$ distincte de l'identité.

Exercice 11 – Le groupe orthogonal du plan n'est pas commutatif

a) Montrer que $SO(2)$ est commutatif et isomorphe à $\mathrm{U} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$.

b) Calculer $R_\theta S_0$ et $S_0 R_\theta$ et conclure que $O(2)$ n'est pas commutatif.

c) Montrer que $S_0 R_\theta S_0 = R_{-\theta}$ et interpréter.

Exercice 12 – Isométries de déterminant -1 en dimension 3

Soit $u \in O(3)$ avec $\det u = -1$.

a) Montrer que $-u \in SO(3)$; en déduire que $u = -R$ avec R rotation d'axe D, d'angle θ.

b) Montrer que u est une réflexion si et seulement si $\theta = \pi$, et que $u = -\mathrm{id}$ si et seulement si $\theta = 0$.

c) Décrire géométriquement u dans le cas général (« antirotation »).

Exercice 13 – Compacité du groupe orthogonal

On munit $M_n(\mathbb{R})$ de la norme de Frobenius $\|M\| = \sqrt{\mathrm{tr}(M^{\mathsf{T}} M)}$.

a) Montrer que $O(n)$ est borné (calculer $\|Q\|$ pour $Q \in O(n)$).

b) Montrer que $O(n)$ est fermé (image réciproque de $\{I\}$ par une application continue).

c) En déduire que $O(n)$ est compact, et que $SO(n)$ l'est aussi.

Exercice 14 – Rotation qui envoie un vecteur sur un autre

Dans $\mathbb{R}^3$, on cherche une rotation R telle que $R(e_1) = b$ avec $b = \frac{1}{3}(1, 2, 2)$.

a) Vérifier que $\|b\| = 1$ et calculer l'angle α entre e_1 et b.

b) Montrer que la rotation d'axe dirigé par $e_1 \wedge b$ et d'angle α convient.

c) Montrer que la solution n'est pas unique (composer avec une rotation d'axe e_1).

Exercice 15 – Synthèse : reconnaître une rotation de l'espace

Soit $M = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$.

a) Montrer que $M \in SO(3)$.

b) Déterminer l'axe de la rotation.

c) Déterminer $\cos\theta$ et le signe de $\sin\theta$ (orienter l'axe par $u = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 1)$).

d) Calculer M^{T} et l'interpréter.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).