Plaquette 2 – Produits scalaires, inégalité de Cauchy-Schwarz et orthogonalité

Espaces euclidiens — Prépa MP / MPI (2e année)

Exercices

Méthode

Pour montrer qu'une application est un **produit scalaire**, on vérifie bilinéarité, symétrie, positivité, puis le point délicat : la **définition** ($\langle x, x\rangle = 0 \Rightarrow x = 0$), qui utilise souvent la continuité ou un nombre suffisant de racines. **Cauchy-Schwarz** $|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|\|y\|$ fournit des inégalités classiques dès qu'on choisit bien le produit scalaire et les deux vecteurs ; le cas d'égalité (colinéarité) donne les cas extrémaux. Pour calculer un **orthogonal**, on écrit les conditions $\langle x, f_i\rangle = 0$ sur une base de F.

Exercice 1 – Le produit scalaire intégral

Sur $E = C([0,1], \mathbb{R})$, on pose $\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$.

a) Montrer que c'est un produit scalaire.

b) Pourquoi n'est-ce plus un produit scalaire sur l'espace des fonctions continues par morceaux ?

c) Montrer que $\left(\int_0^1 f\right)^2 \leq \int_0^1 f^2$, avec égalité si et seulement si f est constante.

Exercice 2 – Produit scalaire par évaluation

Soit $x_0, \ldots, x_n$ des réels distincts.

a) Montrer que $\langle P, Q\rangle = \sum_{k=0}^{n} P(x_k)Q(x_k)$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.

b) Est-ce un produit scalaire sur $\mathbb{R}_{n+1}[X]$?

c) Montrer que la base de Lagrange $(L_0, \ldots, L_n)$ est orthonormée pour ce produit scalaire.

Exercice 3 – Un produit scalaire non canonique sur R²

Soit $\varphi(x, y) = x_1y_1 + 2x_2y_2 + x_1y_2 + x_2y_1$ sur $\mathbb{R}^2$.

a) Écrire $\varphi(x, y) = X^{\mathsf{T}}GY$ et montrer que φ est un produit scalaire.

b) Orthonormaliser la base canonique pour φ.

c) Écrire $\varphi(x, x)$ comme somme de deux carrés.

Exercice 4 – Inégalités par Cauchy-Schwarz

Soit $a_1, \ldots, a_n$ réels et $x_1, \ldots, x_n$ réels strictement positifs.

a) Montrer que $\left(\sum a_k\right)^2 \leq n\sum a_k^2$.

b) Montrer que $\left(\sum x_k\right)\left(\sum \frac{1}{x_k}\right) \geq n^2$ et étudier le cas d'égalité.

c) Montrer que $\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{k} \leq \sqrt{\frac{\pi^2}{6}}\sqrt{\sum a_k^2}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 5 – Calcul d'un orthogonal dans R⁴

Soit $F = \mathrm{Vect}(f_1, f_2)$ avec $f_1 = (1,1,0,0)$ et $f_2 = (0,1,1,1)$ dans $\mathbb{R}^4$ euclidien canonique.

a) Écrire $F^\perp$ par deux équations.

b) En donner une base et vérifier les dimensions.

c) Décomposer $x = (1,0,0,0)$ selon $F \oplus F^\perp$.

Exercice 6 – Déterminant de Gram et distance

Soit $(x_1, \dots, x_p)$ libre dans un espace euclidien, $F = \mathrm{Vect}(x_i)$ et $x \in E$.

a) Montrer que $G(x_1, \dots, x_p) > 0$ (écrire la matrice de Gram comme $M^{\mathsf{T}}M$ dans une base orthonormée).

b) Montrer que $d(x,F)^2 = \dfrac{G(x_1, \dots, x_p, x)}{G(x_1, \dots, x_p)}$ (remplacer x par $x - p_F(x)$ dans la dernière ligne et colonne).

c) Application : distance de $(1,1,1)$ au plan engendré par $(1,0,0)$ et $(1,1,0)$.

Exercice 7 – Une norme qui ne vient pas d'un produit scalaire

a) Montrer que si une norme provient d'un produit scalaire, elle vérifie l'identité du parallélogramme.

b) Montrer que $\|\cdot\|_\infty$ sur $\mathbb{R}^2$ ne provient d'aucun produit scalaire.

c) Même question pour $\|\cdot\|_1$.

Exercice 8 – Famille orthogonale en dimension infinie

Sur $C([0, 2\pi])$ muni de $\langle f, g\rangle = \int_0^{2\pi} fg$, on considère $c_k(t) = \cos(kt)$ pour $k \in \mathbb{N}$.

a) Calculer $\langle c_k, c_l\rangle$ pour $k \neq l$, puis $\|c_k\|^2$.

b) En déduire que la famille $(c_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est libre, et que E est de dimension infinie.

c) Calculer la projection orthogonale de $f(t) = \cos^3 t$ sur $\mathrm{Vect}(c_0, c_1, c_2, c_3)$.

Exercice 9 – Gram-Schmidt dans R⁴

Orthonormaliser $v_1 = (1,1,1,1)$, $v_2 = (1,1,0,0)$, $v_3 = (1,0,0,0)$ dans $\mathbb{R}^4$ euclidien canonique.

a) Calculer e_1, puis e_2.

b) Calculer e_3.

c) Compléter en une base orthonormée de $\mathbb{R}^4$.

Exercice 10 – Matrice de Gram et changement de base

Soit B une base de E euclidien et $G = (\langle b_i, b_j\rangle)$ sa matrice de Gram.

a) Montrer que $\langle x, y\rangle = X^{\mathsf{T}} G Y$ (coordonnées dans B).

b) Si B' est une autre base, de matrice de passage P, montrer que $G' = P^{\mathsf{T}} G P$.

c) En déduire que B' est orthonormée si et seulement si $P^{\mathsf{T}} G P = I$, et que $\det G > 0$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 11 – Représentation d'une forme linéaire

Sur $\mathbb{R}_1[X]$ muni de $\langle P, Q\rangle = \int_0^1 PQ$, on considère $\varphi(P) = P(0)$.

a) Justifier l'existence d'un unique $R \in \mathbb{R}_1[X]$ tel que $\varphi(P) = \langle P, R\rangle$ pour tout P.

b) Déterminer R.

c) En déduire que $|P(0)| \leq 2\left(\int_0^1 P^2\right)^{1/2}$ pour tout $P \in \mathbb{R}_1[X]$.

Exercice 12 – Cauchy-Schwarz pour les fonctions

Soit f continue et strictement positive sur $[0, 1]$.

a) Montrer que $\left(\int_0^1 f\right)\left(\int_0^1 \frac{1}{f}\right) \geq 1$.

b) Étudier le cas d'égalité.

c) Montrer que $\int_0^1 \sqrt{t}\, \mathrm{e}^t \,\mathrm{d}t \leq \sqrt{\frac{\mathrm{e}^2 - 1}{4}}$.

Exercice 13 – Matrices et produit scalaire de Frobenius

Sur $M_n(\mathbb{R})$, on pose $\langle A, B\rangle = \mathrm{tr}(A^{\mathsf{T}}B)$.

a) Montrer que $\langle A, B\rangle = \sum_{i,j} a_{ij}b_{ij}$ et que c'est un produit scalaire.

b) Montrer que $S_n \perp A_n$ et en déduire $A_n = S_n^{\perp}$.

c) Montrer que $|\mathrm{tr}A| \leq \sqrt{n}\,\|A\|$, avec égalité si et seulement si A est scalaire.

Exercice 14 – Orthogonal et inclusion

Soit F, G deux sous-espaces d'un espace euclidien E.

a) Montrer que $F \subset G \Rightarrow G^{\perp} \subset F^{\perp}$.

b) Montrer que $(F + G)^{\perp} = F^{\perp} \cap G^{\perp}$ et $(F \cap G)^{\perp} = F^{\perp} + G^{\perp}$.

c) Vérifier la seconde égalité en dimensions pour $F = \mathrm{Vect}(e_1, e_2)$ et $G = \mathrm{Vect}(e_2, e_3)$ dans $\mathbb{R}^3$.

Exercice 15 – Synthèse : un produit scalaire sur les polynômes par les dérivées

Sur $\mathbb{R}_n[X]$, on pose $\langle P, Q\rangle = \sum_{k=0}^{n} P^{(k)}(0)Q^{(k)}(0)$.

a) Montrer que c'est un produit scalaire.

b) Montrer que $\left(\frac{X^k}{k!}\right)_{0 \leq k \leq n}$ est une base orthonormée.

c) Calculer la distance de X^n à $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.

d) Calculer $\|(1 + X)^n\|^2$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).