Plaquette 3 – Projections orthogonales, distances et moindres carrés

Espaces euclidiens — Prépa MP / MPI (2e année)

Exercices

Méthode

Le projeté orthogonal $p_F(x)$ est l'unique point de F **le plus proche** de x ; il est caractérisé par $p_F(x) \in F$ et $x - p_F(x) \perp F$. Pour le calculer : avec une base **orthonormée** de F, $p_F(x) = \sum \langle x, e_i \rangle e_i$; avec une base quelconque (colonnes de A), on résout les **équations normales** $A^{\mathsf{T}}A\,\lambda = A^{\mathsf{T}}x$; si F est un hyperplan, on passe par le vecteur normal. Tout problème de **minimisation quadratique** ($\min \int (f-P)^2$, régression linéaire, système surdéterminé) se ramène à une distance à un sous-espace.

Exercice 1 – Projection sur une droite et sur un plan

Dans $\mathbb{R}^3$ euclidien canonique, soit $u = (1,2,2)$, $D = \mathbb{R}u$ et $P = D^{\perp}$.

a) Écrire la matrice de la projection orthogonale sur D.

b) En déduire celle de la projection sur P, puis celle de la réflexion par rapport à P.

c) Projeter $x = (3,0,0)$ sur D et sur P.

Exercice 2 – Matrice de projection sur un plan donné par une base

Soit $F = \mathrm{Vect}((1,0,1),(0,1,1))$ et A la matrice ayant ces vecteurs en colonnes.

a) Calculer $A^{\mathsf{T}}A$ et la matrice $P = A(A^{\mathsf{T}}A)^{-1}A^{\mathsf{T}}$.

b) Retrouver P à l'aide d'un vecteur normal à F.

c) Vérifier que $P^2 = P$ et $P^{\mathsf{T}} = P$.

Exercice 3 – Projecteurs orthogonaux : trois caractérisations

Soit p un projecteur ($p^2 = p$) d'un espace euclidien E.

a) Montrer que si p est orthogonal, alors p est symétrique ($p^* = p$).

b) Montrer que si p est symétrique, alors $\ker p \perp \mathrm{Im}\, p$.

c) Montrer que p est orthogonal si et seulement si $\|p(x)\| \leq \|x\|$ pour tout x (pour le sens réciproque, considérer $x = y + tz$ avec $y \in \mathrm{Im}\, p$, $z \in \ker p$).

Exercice 4 – Droite des moindres carrés

On cherche la droite $y = ax + b$ qui approche au mieux les points $(0,1)$, $(1,3)$, $(2,4)$, $(3,4)$ au sens des moindres carrés.

a) Écrire le problème sous la forme $\min \|MX - Y\|$.

b) Écrire et résoudre les équations normales.

c) Calculer les résidus et vérifier qu'ils sont orthogonaux aux colonnes de M.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 5 – Système surdéterminé

Le système $x + y = 1$, $x - y = 0$, $2x + y = 2$ n'a pas de solution.

a) Le vérifier.

b) Déterminer la solution au sens des moindres carrés.

c) Calculer l'erreur minimale $\|AX - b\|^2$.

Exercice 6 – Approximation de l'exponentielle par une fonction affine

Sur $C([0,1])$ muni de $\langle f, g\rangle = \int_0^1 fg$, on cherche la projection de $f(t) = \mathrm{e}^t$ sur $\mathbb{R}_1[X]$.

a) Rappeler une base orthonormée de $\mathbb{R}_1[X]$: $e_0 = 1$, $e_1 = 2\sqrt{3}\left(X - \frac{1}{2}\right)$.

b) Calculer $\langle f, e_0\rangle$ et $\langle f, e_1\rangle$.

c) En déduire la meilleure approximation affine de e^t en moyenne quadratique.

Exercice 7 – Distance d'une matrice aux symétriques

Sur $M_n(\mathbb{R})$ muni de $\langle A, B\rangle = \mathrm{tr}(A^{\mathsf{T}}B)$:

a) Montrer que la projection orthogonale sur S_n est $M \mapsto \frac{M + M^{\mathsf{T}}}{2}$.

b) En déduire $d(M, S_n)$.

c) Calculer $d(M, S_2)$ et $d(M, H)$ pour $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, où H est l'hyperplan des matrices de trace nulle.

Exercice 8 – Un minimum par polynôme orthogonal

On cherche $m = \min_{a,b,c} \int_0^1 (t^3 - at^2 - bt - c)^2 \,\mathrm{d}t$.

a) Interpréter m comme $d(X^3, \mathbb{R}_2[X])^2$ pour $\langle P, Q\rangle = \int_0^1 PQ$.

b) Montrer que le minimum est atteint pour l'unique polynôme unitaire $Q = X^3 - aX^2 - bX - c$ orthogonal à $1, X, X^2$.

c) Vérifier que $Q = X^3 - \frac{3}{2}X^2 + \frac{3}{5}X - \frac{1}{20}$ convient et calculer m.

Exercice 9 – Pythagore et projection

Soit F un sous-espace de E euclidien et $x \in E$.

a) Montrer que $\|x\|^2 = \|p_F(x)\|^2 + d(x, F)^2$.

b) Montrer que $p_F(x)$ est l'unique minimiseur de $y \mapsto \|x - y\|$ sur F.

c) Application : dans $\mathbb{R}^3$, $x = (1, 2, 3)$ et $F = \{x + y + z = 0\}$; calculer $\|p_F(x)\|$ sans calculer $p_F(x)$.

Exercice 10 – Symétrie orthogonale par rapport à une droite de l'espace

Soit $D = \mathbb{R}(1, 1, 1)$ dans $\mathbb{R}^3$ et $s = 2p_D - \mathrm{id}$.

a) Calculer la matrice de s.

b) Montrer que s est orthogonale et symétrique, et calculer $\det s$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

c) Montrer que s est la rotation d'angle π d'axe D.

Exercice 11 – Somme de deux projecteurs orthogonaux

Soit F, G deux sous-espaces de E euclidien.

a) Montrer que si $F \perp G$, alors $p_F + p_G = p_{F \oplus G}$.

b) Réciproquement, on suppose que $q = p_F + p_G$ est un projecteur. Montrer que $p_F p_G + p_G p_F = 0$, puis que $p_F p_G = 0$ (composer à gauche par p_F).

c) En déduire $F \perp G$.

Exercice 12 – Inégalité de Bessel sur des fonctions

Sur $C([-\pi, \pi])$ muni de $\langle f, g\rangle = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} fg$, la famille $(\sin(kt))_{k \geq 1}$ est orthonormée.

a) Pour $f(t) = t$, calculer $b_k = \langle f, \sin(k\cdot)\rangle$.

b) Écrire l'inégalité de Bessel pour les n premiers termes.

c) En déduire que $\sum_{k \geq 1} \frac{1}{k^2} \leq \frac{\pi^2}{6}$.

Exercice 13 – Projection et matrice de Gram

Soit $F = \mathrm{Vect}(f_1, \ldots, f_p)$ (famille libre) et $x \in E$.

a) Montrer que $p_F(x) = \sum \lambda_i f_i$ où λ est solution de $G\lambda = (\langle x, f_j\rangle)_j$, G matrice de Gram.

b) Application dans $\mathbb{R}_1[X]$, $\langle P, Q\rangle = \int_{-1}^{1} PQ$: projeter X^3 sur $\mathrm{Vect}(1, X)$.

c) Vérifier que $X^3 - p(X^3)$ est orthogonal à 1 et à X.

Exercice 14 – Distance à un sous-espace défini par des équations

Dans $\mathbb{R}^4$, soit $F = \{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0,\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0\}$ et $a = (1, 2, 3, 4)$.

a) Déterminer $F^\perp$ et une base orthogonale de $F^\perp$.

b) Calculer $p_{F^\perp}(a)$ et en déduire $d(a, F)$.

c) En déduire $p_F(a)$.

Exercice 15 – Synthèse : régression parabolique

On cherche la parabole $y = ax^2 + bx + c$ la plus proche (moindres carrés) des points $(-1, 1)$, $(0, 0)$, $(1, 1)$, $(2, 3)$.

a) Écrire M, Y et les équations normales.

b) Résoudre.

c) Calculer les résidus, vérifier leur orthogonalité aux colonnes de M et l'erreur minimale.

d) Interpréter géométriquement MX (projection de Y sur $\mathrm{Im}M$).

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).