Plaquette 4 – Applications linéaires continues et normes subordonnées

Espaces vectoriels normés — Prépa MP / MPI (2e année)

Corrections détaillées

Boîte à outils

Continuité des applications linéaires.

— u continue ⇔ continue en 0 ⇔ bornée sur la boule unité ⇔ $\exists C,\ \|u(x)\| \leq C\|x\|$.

— Norme subordonnée et sous-multiplicativité :

$$\|u\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|u(x)\|}{\|x\|}, \qquad \|u \circ v\| \leq \|u\|\,\|v\|$$

— Matrices : $\|A\|_\infty = \max_i \sum_j |a_{ij}|$ (lignes), $\|A\|_1 = \max_j \sum_i |a_{ij}|$ (colonnes), $\|A\|_2 = \sigma_{\max}(A)$.

— $\rho(A) \leq \|A\|$ pour toute norme subordonnée.

— **Neumann** : si $\|u\| < 1$ (espace complet), $\mathrm{id} - u$ est inversible, d'inverse $\sum_k u^k$, et $\|(\mathrm{id} - u)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|u\|}$.

Correction de l'exercice 1 – La norme subordonnée à la norme infinie

a) $|(AX)_i| \leq \sum_j |a_{ij}||x_j| \leq \left(\sum_j |a_{ij}|\right)\|X\|_\infty$.

b) Soit i_0 réalisant le max, et $x_j = \mathrm{signe}(a_{i_0 j})$ (ou 1 si $a_{i_0 j} = 0$). Alors $\|X\|_\infty = 1$ et $(AX)_{i_0} = \sum_j |a_{i_0 j}|$.

c) Sommes des lignes en valeur absolue : 6, 5, 4. Donc

$$\|A\|_\infty = 6$$

— atteint pour $X = (1, -1, 1)$: $AX = (6, -5, -2)$.

Réponse. $\|A\|_\infty = \max_i \sum_j |a_{ij}|$; ici 6, atteint en $(1, -1, 1)$.

Correction de l'exercice 2 – La norme subordonnée à la norme 1

a) $\sum_i |(AX)_i| \leq \sum_j |x_j| \sum_i |a_{ij}| \leq \max_j \left(\sum_i |a_{ij}|\right)\|X\|_1$.

b) Si j_0 réalise le max, Ae_{j_0} est la colonne j_0, de norme 1 égale à ce max, et $\|e_{j_0}\|_1 = 1$.

c) Sommes des colonnes : 3, 7, 5, donc $\|A\|_1 = 7$. Et

$$\rho(A) \approx 3{,}46 \leq \min(7, 6) = 6$$

Réponse. $\|A\|_1 = \max_j \sum_i |a_{ij}|$; ici 7.

Correction de l'exercice 3 – La forme linéaire intégrale

a) $|\varphi(f)| \leq \int_0^1 |f| = \|f\|_1 \leq \|f\|_\infty$. Avec $f = 1$, égalité : $\|\varphi\| = 1$ dans les deux cas.

b) $|f(0)| \leq \|f\|_\infty$, égalité pour $f = 1$.

c) $f_n(x) = \max(0, 1 - nx)$: $\|f_n\|_1 = \frac{1}{2n}$ et $\psi(f_n) = 1$. Le rapport

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$$\frac{|\psi(f_n)|}{\|f_n\|_1} = 2n$$

— n'est pas borné.

Réponse. $\|\varphi\| = 1$ pour les deux normes ; ψ continue (norme 1) pour $\|\cdot\|_\infty$, pas pour $\|\cdot\|_1$.

Correction de l'exercice 4 – La dérivation n'est pas continue

a) $\|X^n\| = 1$ et $\|nX^{n-1}\| = n$.

b) $\dfrac{\|D(X^n)\|}{\|X^n\|} = n$ n'est pas borné.

c) $\|D(P)\| = \|P'\| \le N(P)$:

$$\|D\|_{N \to \|\cdot\|} \le 1$$

— La continuité dépend des normes choisies : en ajoutant la dérivée dans la norme de départ, on rend D continue.

Réponse. $\|D(X^n)\| = n$: D non continue ; continue (norme ≤ 1) pour $N = \|\cdot\| + \|\cdot'\|$.

Correction de l'exercice 5 – Opérateur de multiplication

a) $|g(x)f(x)| \le \|g\|_\infty \|f\|_\infty$.

b) Avec $f = 1$: $\|M_g(1)\| = \|g\|_\infty$.

c) $\|g\|_\infty = g\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$. Si $gf = \lambda f$ avec $f \neq 0$, alors $(g - \lambda)f = 0$; f ne s'annule pas sur un intervalle ouvert, sur lequel $g = \lambda$, ce qui est impossible car g n'est constante sur aucun intervalle :

$$\|M_g\| = \frac{1}{4}, \qquad M_g \text{ n'a pas de valeur propre}$$

Réponse. $\|M_g\| = \|g\|_\infty$; ici $\frac{1}{4}$, sans valeur propre.

Correction de l'exercice 6 – L'opérateur de primitivation

a) $|Tf(x)| \le x\|f\|_\infty \le \|f\|_\infty$, égalité pour $f = 1$ en $x = 1$.

b) $|Tf(x)| \le \|f\|_1$ pour tout x, d'où $\|Tf\|_1 \le \|f\|_1$. Pour f_n d'intégrale 1 concentrée sur $\left[0, \frac{1}{n}\right]$ et positive, $Tf_n(x) = 1$ pour $x \ge \frac{1}{n}$, d'où

$$\|Tf_n\|_1 \ge 1 - \frac{1}{n} \to 1 = \|f_n\|_1$$

c) $|T^2 f(x)| \le \|f\|_\infty \int_0^x (x - t)\,\mathrm{d}t = \frac{x^2}{2}\|f\|_\infty$, égalité pour $f = 1$ en $x = 1$: $\|T^2\|_\infty = \frac{1}{2} < \|T\|^2$.

Réponse. $\|T\| = 1$ pour les deux normes ; $\|T^2\|_\infty = \frac{1}{2}$.

Correction de l'exercice 7 – Formes linéaires sur $\mathbb{R}^n$

a) $|\varphi(x)| \le \sum |a_i| \|x\|_\infty$, égalité pour $x_i = \text{signe}(a_i)$: $\|\varphi\| = \|a\|_1$.

b) Pour $\|\cdot\|_1$: $|\varphi(x)| \le \max|a_i| \sum |x_i|$, égalité en e_{i_0} : $\|\varphi\| = \|a\|_\infty$. Pour $\|\cdot\|_2$: Cauchy-Schwarz, égalité en $x = a$: $\|\varphi\| = \|a\|_2$.

c) Pour $a = (1, -2, 2)$:

$$\|a\|_1 = 5, \qquad \|a\|_\infty = 2, \qquad \|a\|_2 = 3$$

Réponse. Normes duales : $\|\varphi\| = \|a\|_1$, $\|a\|_\infty$, $\|a\|_2$; ici 5, 2, 3.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l'exercice 8 – Évaluation d'un polynôme hors de l'intervalle

a) $|P(2)| \le \sum |a_k| 2^k \le 2^n N(P)$.

b) Égalité pour $P = X^n$: $\varphi(X^n) = 2^n$ et $N(X^n) = 1$.

c) Sur $\mathbb{R}[X]$, $\dfrac{|\varphi(X^n)|}{N(X^n)} = 2^n$ n'est pas borné : φ n'est pas continue. En dimension finie, $\|\varphi\|$ est finie mais

$$\|\varphi\|_{\mathbb{R}_n[X]} = 2^n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

Réponse. $\|\varphi\| = 2^n$ sur $\mathbb{R}_n[X]$; non continue sur $\mathbb{R}[X]$.

Correction de l'exercice 9 – Opérateurs de décalage

a) $\|S(u)\|_\infty \le \|u\|_\infty$ et $\|R(u)\|_\infty = \|u\|_\infty$; égalités pour la suite constante 1.

b) R conserve la norme, et son image ne contient que des suites de premier terme nul. S est surjective ($S(R(v)) = v$) et $S(1, 0, 0, \ldots) = 0$.

c) $S \circ R = \mathrm{id}$ mais $R \circ S(u) = (0, u_1, u_2, \ldots) \neq u$ en général. En dimension finie, $SR = \mathrm{id}$ entraînerait

$$RS = \mathrm{id}$$

— (un inverse à droite est un inverse) ; en dimension infinie, ce n'est plus vrai.

Réponse. $\|S\| = \|R\| = 1$; $SR = \mathrm{id} \neq RS$.

Correction de l'exercice 10 – Série de Neumann

a) $\|A^k\| \le \|A\|^k$: la série converge absolument (dimension finie, donc complet). Le télescopage est immédiat.

b) $A^{N+1} \to 0$, donc $(I - A)\sum_{k \ge 0} A^k = I$, et

$$\|(I - A)^{-1}\| \le \sum \|A\|^k = \frac{1}{1 - \|A\|}$$

c) $\|A\|_\infty = \max(0{,}5;\ 0{,}5) = 0{,}5$. $I - A = \begin{pmatrix} 0{,}8 & -0{,}3 \\ -0{,}1 & 0{,}6 \end{pmatrix}$, de déterminant 0,45, d'où $(I - A)^{-1} = \frac{1}{0{,}45}\begin{pmatrix} 0{,}6 & 0{,}3 \\ 0{,}1 & 0{,}8 \end{pmatrix}$, de norme ∞ égale à $\frac{0{,}9}{0{,}45} = 2 \le \frac{1}{1 - 0{,}5} = 2$ (égalité).

Réponse. $(I - A)^{-1} = \sum A^k$, de norme $\le \frac{1}{1 - \|A\|}$; ici $2 \le 2$.

Correction de l'exercice 11 – Rayon spectral et normes

a) $AX = \lambda X$, $X \neq 0$: $|\lambda| \|X\| = \|AX\| \le \|A\| \|X\|$.

b) $\rho(N) = 0$ et $\|N\|_\infty = \|N\|_1 = \|N\|_2 = 1$.

c) $\rho(N) = 0$ avec $N \neq 0$: pas de séparation. Et

$$\rho(N + N^{\mathsf{T}}) = \rho\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 1 > 0 = \rho(N) + \rho(N^{\mathsf{T}})$$

Réponse. $\rho \le \|\cdot\|$; $\rho(N) = 0 < 1$; ρ n'est ni séparante ni sous-additive.

Correction de l'exercice 12 – Produit matriciel bilinéaire continu

a) Sous-multiplicativité. Continuité en (X_0, Y_0) :

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$$XY - X_0Y_0 = (X - X_0)Y + X_0(Y - Y_0)$$

— d'où $\|XY - X_0Y_0\| \leq \|X - X_0\|\|Y\| + \|X_0\|\|Y - Y_0\| \to 0$.

b) Par récurrence, $X^k = B(X^{k-1}, X)$ est continue ; puis combinaison linéaire.

c) $X^{-1} = \frac{1}{\det X}\mathrm{com}(X)^{\mathsf{T}}$: coefficients rationnels en ceux de X, de dénominateur $\det X$ ne s'annulant pas sur GL_n.

Réponse. $\|XY\| \leq \|X\|\|Y\|$: produit continu ; $X \mapsto P(X)$ et $X \mapsto X^{-1}$ continues.

Correction de l'exercice 13 – Caractérisations de la continuité d'une application linéaire

a) Il existe $\delta > 0$ tel que $\|x\| \leq \delta \Rightarrow \|u(x)\| \leq 1$. Pour $x \neq 0$, $y = \frac{\delta}{\|x\|}x$ vérifie $\|y\| = \delta$, donc $\|u(y)\| \leq 1$, soit

$$\|u(x)\| \leq \frac{1}{\delta}\|x\|$$

b) $\|u(x) - u(y)\| = \|u(x - y)\| \leq C\|x - y\|$.

c) Si u est continue, $\|u(x)\| \leq C$ sur la boule unité. Réciproquement, si $\|u(x)\| \leq M$ pour $\|x\| \leq 1$, alors par homogénéité $\|u(x)\| \leq M\|x\|$.

Réponse. Continuité en $0 \Rightarrow \|u(x)\| \leq \frac{1}{\delta}\|x\| \Rightarrow$ lipschitzienne ; équivaut à $u(B)$ bornée.

Correction de l'exercice 14 – Norme d'un opérateur à noyau

a) $|Tf(x)| \leq \int_0^1 |K(x,t)||f(t)|\,\mathrm{d}t \leq \|f\|_\infty \int_0^1 |K(x,t)|\,\mathrm{d}t$.

b) $\int_0^1 (x + t)\,\mathrm{d}t = x + \frac{1}{2}$, de sup $\frac{3}{2}$ en $x = 1$. Avec $f = 1$: $Tf(x) = x + \frac{1}{2}$, de norme $\frac{3}{2}$. Donc

$$\|T\| = \frac{3}{2}$$

c) $Tf(x) = x\int_0^1 f + \int_0^1 tf(t)\,\mathrm{d}t$: l'image est incluse dans $\mathbb{R}_1[X]$; $T(1) = x + \frac{1}{2}$ et $T(t) = \frac{x}{2} + \frac{1}{3}$ sont libres, donc $\mathrm{Im}T = \mathbb{R}_1[X]$.

Réponse. $\|T\| = \frac{3}{2}$; $\mathrm{Im}T = \mathbb{R}_1[X]$.

Correction de l'exercice 15 – Synthèse : un opérateur injectif non surjectif

a) $|T(f)(x)| \leq x\|f\|_\infty + \|f\|_\infty \leq 2\|f\|_\infty$, et $T(1)(x) = x + 1$ a pour norme 2 :

$$\|T\| = 2$$

b) Si $T(f) = 0$, alors $xf(x) = -c$ avec $c = \int_0^1 f$ constant. En $x = 0$: $c = 0$, donc $f(x) = 0$ pour $x > 0$, puis $f(0) = 0$ par continuité.

c) Si $T(f) = g$, alors $g(0) = \int_0^1 f$, soit $\int_0^1 f = 0$, et $xf(x) = \sqrt{x}$, d'où $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ pour $x > 0$, non prolongeable par continuité en 0. Contradiction.

d) T est injective, continue, mais pas surjective : en dimension infinie, le théorème du rang n'a pas d'analogue.

Réponse. $\|T\| = 2$; T injective ; $\sqrt{x} \notin \mathrm{Im}T$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).