Plaquette 5 – Espaces vectoriels normés : distances, approximation et problèmes de synthèse

Espaces vectoriels normés — Prépa MP / MPI (2e année)

Corrections détaillées

Boîte à outils

Distances.

— Distance à un hyperplan $H = \ker \varphi$ (φ continue non nulle) :

$$d(x, H) = \frac{|\varphi(x)|}{\|\varphi\|}$$

— Distance de $f \in C([a,b])$ aux constantes pour $\|\cdot\|_\infty$: $\frac{\max f - \min f}{2}$, atteinte en $c = \frac{\max f + \min f}{2}$.

— En dimension finie, la distance à un sous-espace est atteinte (compacité) ; unicité si la norme est strictement convexe (euclidienne).

— $|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|$: la norme est 1-lipschitzienne.

— $\|A\|_2 \leq \sqrt{\|A\|_1 \|A\|_\infty}$; la norme de Frobenius n'est subordonnée à aucune norme ($\|I\|_F = \sqrt{n}$).

Correction de l'exercice 1 – Distance d'une fonction aux constantes

a) $f - c$ prend ses valeurs dans $[m - c, M - c]$ et atteint les deux bornes.

b) $\max(M - c, c - m) \geq \frac{(M - c) + (c - m)}{2} = \frac{M - m}{2}$, avec égalité si et seulement si $M - c = c - m$:

$$c = \frac{M + m}{2}, \qquad d(f, \mathbb{R}) = \frac{M - m}{2}$$

c) x^2 : $m = 0$, $M = 1$, distance $\frac{1}{2}$ atteinte pour $c = \frac{1}{2}$. $\sin(2\pi x)$: $m = -1$, $M = 1$, distance 1 atteinte pour $c = 0$.

Réponse. $d(f, \mathbb{R}) = \frac{M - m}{2}$, en $c = \frac{M + m}{2}$; $\frac{1}{2}$ pour x^2, 1 pour $\sin(2\pi x)$.

Correction de l'exercice 2 – Distance à un hyperplan pour la norme infinie

a) Pour $\|\cdot\|_\infty$, la norme duale est la norme 1 des coefficients : $\|\varphi\| = 1 + 2 = 3$.

b) Pour $h \in H$: $|\varphi(a)| = |\varphi(a - h)| \leq \|\varphi\| \|a - h\|$, d'où $d(a, H) \geq \frac{|\varphi(a)|}{\|\varphi\|}$. Égalité : prendre $h = a - \frac{\varphi(a)}{\varphi(v)} v$ avec $v = (1, 1)$, $\|v\| = 1$, $\varphi(v) = 3 = \|\varphi\|$. Ici

$$d(a, H) = \frac{3}{3} = 1$$

c) $h = a - v = (0, 0)$: $\|a - h\|_\infty = 1$ ✓ (et $(0,0) \in H$).

Réponse. $\|\varphi\| = 3$; $d(a, H) = 1$, atteinte en $(0, 0)$.

Correction de l'exercice 3 – Une semi-norme

a) Ces propriétés viennent de la valeur absolue. Mais $f(x) = x(1 - x) \neq 0$ vérifie $p(f) = 0$.

b) Somme d'une semi-norme et d'une norme : homogénéité et inégalité triangulaire, et

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$N(f) = 0 \Rightarrow \|f\|_1 = 0 \Rightarrow f = 0$.

c) $N(f) \leq 3\|f\|_\infty$. Mais pour f_n un pic de hauteur 1 en $\frac{1}{2}$ et de base $\frac{1}{n}$: $N(f_n) = \frac{1}{2n}$ et $\|f_n\|_\infty = 1$. Donc

$$\frac{\|f_n\|_\infty}{N(f_n)} = 2n \to +\infty$$

— non équivalentes.

Réponse. p semi-norme ; $N = p + \|\cdot\|_1$ norme, non équivalente à $\|\cdot\|_\infty$.

Correction de l'exercice 4 – Norme uniforme sur deux intervalles

a) Un polynôme nul sur un intervalle non trivial est nul ; $[0,1] \subset [0,2]$.

b) $N_2(X^n) = 2^n$ et $N_1(X^n) = 1$.

c) Oui (dimension finie). Pour $P = a + bX$: $P(2) = 2P(1) - P(0)$, donc $|P(x)| \leq \max(|P(0)|, |P(2)|) \leq 3N_1(P)$ sur $[0,2]$ (une fonction affine atteint son max aux bornes) :

$$N_2 \leq 3N_1 \text{ sur } \mathbb{R}_1[X]$$

— avec égalité pour $P = 2X - 1$ ($N_1 = 1$, $N_2 = 3$).

Réponse. $N_1 \leq N_2$, non équivalentes (X^n) ; sur $\mathbb{R}_1[X]$, $N_2 \leq 3N_1$ (optimal).

Correction de l'exercice 5 – Meilleure approximation non unique

a) $\|(0,1) - (t,0)\|_2 = \sqrt{t^2+1}$, minimal ($= 1$) en $t = 0$ seulement.

b) $\|(-t,1)\|_\infty = \max(|t|, 1)$: minimum 1, atteint pour **tout** $t \in [-1,1]$.

c) $\|(0,1) - (t,t)\|_1 = |t| + |1-t|$, égal à 1 pour tout $t \in [0,1]$ et plus grand ailleurs :

$$d(a, D') = 1, \text{ atteinte sur le segment } \{(t,t) \mid 0 \leq t \leq 1\}$$

— Les normes non strictement convexes peuvent avoir une infinité de meilleures approximations.

Réponse. Euclidienne : unique ; $\|\cdot\|_\infty$: tout $(t,0)$, $|t| \leq 1$; $\|\cdot\|_1$: segment $[(0,0),(1,1)]$.

Correction de l'exercice 6 – Deux normes équivalentes sur les fonctions de classe C¹

a) $|f(0)| \leq \|f\|_\infty$.

b) $f(x) = f(0) + \int_0^x f$, donc $\|f\|_\infty \leq |f(0)| + \|f'\|_\infty = N_2(f)$, puis

$$N_1(f) \leq N_2(f) + \|f'\|_\infty \leq 2N_2(f)$$

c) $f = 1$: $N_1 = N_2 = 1$ (égalité dans a)). $f(x) = x$: $N_1 = 1 + 1 = 2$ et $N_2 = 0 + 1 = 1$ (égalité dans b)).

Réponse. $N_2 \leq N_1 \leq 2N_2$, constantes optimales ($f = 1$, $f = x$).

Correction de l'exercice 7 – Comparaison des normes matricielles

a) $A^\mathsf{T}A$ est symétrique positive, de norme 2 égale à sa plus grande valeur propre, majorée par toute norme subordonnée. Puis $\|A^\mathsf{T}\|_\infty = \|A\|_1$ (les lignes de A^T sont les colonnes de A) et la sous-multiplicativité.

b) $\|A\|_1 = 2$, $\|A\|_\infty = 3$, et $A^\mathsf{T}A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ de valeurs propres 5 et 0 : $\|A\|_2 = \sqrt{5} \approx 2{,}24$, et

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$$\sqrt{5} \leq \sqrt{2 \times 3} = \sqrt{6} \approx 2{,}45$$

c) Toute norme subordonnée vérifie $\|I\| = 1$, alors que $\|I\|_F = \sqrt{n} > 1$.

Réponse. $\|A\|_2 \leq \sqrt{\|A\|_1 \|A\|_\infty}$; ici $\sqrt{5} \leq \sqrt{6}$; $\|I\|_F = \sqrt{n}$.

Correction de l'exercice 8 – Matrices stochastiques

a) P est défini par des inégalités larges et des égalités portant sur des fonctions linéaires continues : fermé. Les coefficients sont dans $[0, 1]$: borné. Une combinaison convexe de stochastiques est stochastique.

b) Chaque somme de ligne vaut 1 : $\|P\|_\infty = 1$. Si P, $Q \in P$, alors $PQ \geq 0$ et $PQ\mathbf{1} = P\mathbf{1} = \mathbf{1}$.

c) $\rho(P) \leq \|P\|_\infty = 1$, et

$$P\mathbf{1} = \mathbf{1}$$

— donc $1 \in \mathrm{Sp}P$.

Réponse. P convexe fermé borné, stable par produit ; $\rho(P) = 1$.

Correction de l'exercice 9 – Norme sur un produit et continuité des opérations

a) Maximum de deux semi-normes séparant ensemble les points.

b) $\|(x + y) - (x' + y')\| \leq \|x - x'\| + \|y - y'\| \leq 2N((x, y) - (x', y'))$.

c) $\lambda x - \lambda_0 x_0 = (\lambda - \lambda_0)x + \lambda_0(x - x_0)$, donc

$$\|\lambda x - \lambda_0 x_0\| \leq |\lambda - \lambda_0|\|x\| + |\lambda_0|\|x - x_0\| \to 0$$

— Pas lipschitzienne : pour $x \neq 0$ fixé, les couples $(n + 1, nx)$ et (n, nx) sont à distance 1 pour la norme produit, mais leurs images $(n + 1)nx$ et n^2x diffèrent de nx, de norme $n\|x\| \to +\infty$.

Réponse. N norme ; addition 2-lipschitzienne ; multiplication externe continue mais non lipschitzienne.

Correction de l'exercice 10 – Normes et suites : la norme est continue

a) $\|x\| \leq \|x - y\| + \|y\|$, et de même en échangeant.

b) Conséquence immédiate. La réciproque est fausse : $x_n = (-1)^n x$ avec $x \neq 0$ a une norme constante sans converger.

c) Pour $\|\cdot\|_1$: $\|f_n\|_1 = \frac{1}{n+1} \to 0$, donc $f_n \to 0$. Pour $\|\cdot\|_\infty$: une limite g devrait aussi être limite pour $\|\cdot\|_1 \leq \|\cdot\|_\infty$, donc $g = 0$; mais

$$\|f_n - 0\|_\infty = 1 \not\to 0$$

— donc (f_n) ne converge pas pour $\|\cdot\|_\infty$.

Réponse. La norme est 1-lipschitzienne ; $x^n \to 0$ pour $\|\cdot\|_1$, pas pour $\|\cdot\|_\infty$.

Correction de l'exercice 11 – Jauge d'un convexe

a) $v \in tC \Leftrightarrow \frac{x^2 + 4y^2}{t^2} \leq 1 \Leftrightarrow t \geq \sqrt{x^2 + 4y^2}$.

b) N est la norme euclidienne associée à la forme quadratique définie positive $x^2 + 4y^2$, et $N(v) \leq 1 \Leftrightarrow v \in C$.

c) $x^2 + y^2 \leq x^2 + 4y^2 \leq 4(x^2 + y^2)$, donc

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$$\|v\|_2 \le N(v) \le 2\|v\|_2$$

— égalités en $(1,0)$ et $(0,1)$.

Réponse. $N = \sqrt{x^2+4y^2}$, de boule unité l'ellipse C ; $\|\cdot\|_2 \le N \le 2\|\cdot\|_2$.

Correction de l'exercice 12 – Continuité d'une norme par rapport à une autre

a) Si $N_2 \le CN_1$, alors $|N_2(x)-N_2(y)| \le N_2(x-y) \le CN_1(x-y)$. Réciproquement, la continuité en 0 donne δ avec $N_1(x) \le \delta \Rightarrow N_2(x) \le 1$, puis par homogénéité

$$N_2(x) \le \frac{1}{\delta} N_1(x)$$

b) Il n'existe pas de C avec $\|f\|_\infty \le C\|f\|_1$ (pics de hauteur 1 et d'aire $\frac{1}{2n}$).

c) $\|f\|_1 \le \|f\|_\infty$.

Réponse. N_2 continue sur $(E,N_1) \Leftrightarrow N_2 \le CN_1$; $\|\cdot\|_\infty$ non continue pour $\|\cdot\|_1$, l'inverse oui.

Correction de l'exercice 13 – Polynômes à racines dans un intervalle

a) Les coefficients sont, au signe près, les fonctions symétriques σ_k des racines, avec $|\sigma_k| \le \binom{n}{k}$.

b) Avec le résultat admis, les racines de P sont dans $[-1,1]$ (fermé), et P est unitaire de degré n (le coefficient dominant 1 passe à la limite).

c) Fermé borné en dimension finie : compact, et la norme uniforme est continue. Pour $n=2$, $P=(X-a)(X-b)$; le minimum de $\sup|P|$ est atteint pour $P = X^2 - \frac{1}{2}$ (polynôme de Tchebychev normalisé, racines $\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$) :

$$\min_{U_2} \sup_{[-1,1]} |P| = \frac{1}{2}$$

Réponse. U_n compact ; pour $n=2$, minimum $\frac{1}{2}$ atteint par $X^2-\frac{1}{2}$.

Correction de l'exercice 14 – Distance entre une matrice et les matrices scalaires

a) $\langle A - cI, I\rangle = \mathrm{tr}A - cn = 0$ pour $c = \frac{\mathrm{tr}A}{n}$.

b) Pythagore avec $\|cI\|_F^2 = c^2 n = \frac{(\mathrm{tr}A)^2}{n}$:

$$d(A,L)^2 = \|A\|_F^2 - \frac{(\mathrm{tr}A)^2}{n}$$

c) $\|A\|_F^2 = 1+4+9+16 = 30$ et $\mathrm{tr}A = 5$: $d^2 = 30 - \frac{25}{2} = \frac{35}{2}$, soit $d = \sqrt{17{,}5} \approx 4{,}18$, la plus proche étant $\frac{5}{2}I$.

Réponse. $p(A) = \frac{\mathrm{tr}A}{n} I$; $d^2 = \|A\|_F^2 - \frac{(\mathrm{tr}A)^2}{n}$; ici $\frac{35}{2}$.

Correction de l'exercice 15 – Synthèse : distance d'un point à une droite selon la norme

a) Projection sur $\mathbb{R}(1,2)$: $\frac{\langle a,(1,2)\rangle}{5}(1,2) = \frac{1}{5}(1,2)$, d'où $d_2 = \|(1,0) - \frac{1}{5}(1,2)\|_2 = \frac{1}{5}\|(4,-2)\|_2 = \frac{2}{\sqrt{5}}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

b) $\|(1-t,-2t)\|_\infty = \max(|1-t|, 2|t|)$, minimal quand $1-t=2t$, soit $t=\frac{1}{3}$: $d_\infty = \frac{2}{3}$, atteinte uniquement en $\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$.

c) $|1-t|+2|t|$ est minimal en $t=0$ (pente $-1+2>0$ à droite de 0, $-1-2<0$ à gauche) : $d_1 = 1$, atteinte en $(0,0)$.

d) $\varphi(a) = 2$. Normes duales de $(2,-1)$: pour $\|\cdot\|_2$, $\sqrt{5}$; pour $\|\cdot\|_\infty$, $\|(2,-1)\|_1 = 3$; pour $\|\cdot\|_1$, $\|(2,-1)\|_\infty = 2$. D'où

$$d_2 = \frac{2}{\sqrt{5}}, \qquad d_\infty = \frac{2}{3}, \qquad d_1 = \frac{2}{2} = 1$$

Réponse. $d_2 = \frac{2}{\sqrt{5}}$, $d_\infty = \frac{2}{3}$, $d_1 = 1$; formule $\frac{|\varphi(a)|}{\|\varphi\|_*}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).