Plaquette 1 – Normes, équivalence, ouverts et applications lipschitziennes

Espaces vectoriels normés — Prépa MP / MPI (2e année)

Corrections détaillées

Boîte à outils

Norme. $N : E \to \mathbb{R}^+$ est une norme si

— $N(x) = 0 \Rightarrow x = 0$ (**séparation**) ;
— $N(\lambda x) = |\lambda| N(x)$ (**homogénéité**) ;
— $N(x+y) \leq N(x) + N(y)$ (**inégalité triangulaire**).

Normes usuelles sur $\mathbb{K}^n$:

$$\|x\|_1 = \sum_i |x_i| \qquad \|x\|_2 = \sqrt{\sum_i x_i^2} \qquad \|x\|_\infty = \max_i |x_i|$$

Sur $C([a\,;b],\mathbb{R})$: $\|f\|_1 = \int_a^b |f|$, $\|f\|_2 = \sqrt{\int_a^b f^2}$, $\|f\|_\infty = \sup |f|$.

Comparaison. N_1 et N_2 sont **équivalentes** s'il existe $\alpha, \beta > 0$ tels que

$$\alpha N_1 \leq N_2 \leq \beta N_1$$

— **Théorème fondamental** : en **dimension finie**, toutes les normes sont équivalentes.
— En dimension infinie, c'est **faux** : sur $C([0\,;1])$, $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_\infty$ ne le sont pas.

Topologie.

— **Boule ouverte** $B(a,r) = \{x \mid \|x-a\| < r\}$. Un **ouvert** est réunion de boules ouvertes ; un **fermé** est le complémentaire d'un ouvert.
— F est fermé $\Leftrightarrow$ toute suite d'éléments de F qui converge a sa limite dans F.
— **Adhérence** $\overline{A}$: ensemble des limites de suites d'éléments de A. **Intérieur** $\mathring{A}$: plus grand ouvert contenu dans A.
— A est **dense** dans E si $\overline{A} = E$ ($\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$, les polynômes dans $C([a\,;b])$ par Weierstrass).
— A est **borné** s'il est inclus dans une boule.

Continuité.

— f est k**-lipschitzienne** si $\|f(x) - f(y)\| \leq k\|x-y\|$; toute application lipschitzienne est **continue**.
— Une application **linéaire** entre espaces normés est continue $\Leftrightarrow$ elle est bornée sur la boule unité $\Leftrightarrow$ elle est lipschitzienne. En **dimension finie**, elle l'est **toujours**.
— **Norme d'opérateur** : $|||u||| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|u(x)\|$, et $\|u(x)\| \leq |||u||| \, \|x\|$.

Correction de l'exercice 1 – Vérifier une norme

Pour N :

— **Séparation** : $|x| + 2|y| = 0$ impose $x = y = 0$ ✓
— **Homogénéité** : $N(\lambda x, \lambda y) = |\lambda||x| + 2|\lambda||y| = |\lambda| N(x,y)$ ✓
— **Triangulaire** : découle de $|a+b| \leq |a| + |b|$ appliquée à chaque coordonnée ✓
— N est donc une **norme** (c'est une norme ℓ^1 pondérée).

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Pour N' : $N'(0,1) = -1 < 0$ — une norme est à valeurs **positives**.

— N' n'est **pas** une norme.

— **Réflexe** : tester d'abord la positivité et la séparation sur des vecteurs simples, c'est le moyen le plus rapide d'éliminer un candidat.

Réponse. N oui ; N' non (valeurs négatives).

Correction de l'exercice 2 – Comparaison de normes en dimension finie

— **Inégalité de gauche** : soit i_0 l'indice où $|x_{i_0}| = \|x\|_\infty$. Alors

$$\|x\|_\infty = |x_{i_0}| \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i| = \|x\|_1$$

— **Inégalité de droite** : chaque $|x_i| \leq \|x\|_\infty$, donc en sommant n termes,

$$\|x\|_1 \leq n\|x\|_\infty$$

— **Conclusion** : les deux normes sont **équivalentes**, avec $\alpha = 1$ et $\beta = n$.

— **Optimalité des constantes** : $x = (1, 0, \ldots, 0)$ donne l'égalité à gauche ; $x = (1, 1, \ldots, 1)$ donne l'égalité à droite ✓

— **Conséquence** : les deux normes définissent la **même topologie** — mêmes ouverts, mêmes suites convergentes, mêmes fonctions continues.

Réponse. Constantes optimales 1 et n.

Correction de l'exercice 3 – Normes non équivalentes

— **Une inégalité est vraie** : $\|f\|_1 = \int_0^1 |f| \leq \|f\|_\infty$.

— **L'autre est fausse** : considérons $f_n(x) = x^n$.

— $\|f_n\|_\infty = 1$ (maximum atteint en 1).

— $\|f_n\|_1 = \int_0^1 x^n \, \mathrm{d}x = \dfrac{1}{n+1} \to 0$.

— S'il existait β avec $\|f\|_\infty \leq \beta\|f\|_1$, on aurait $1 \leq \dfrac{\beta}{n+1}$ pour tout n : impossible.

— **Conclusion** : les deux normes ne sont **pas équivalentes**.

— **Ce que cela signifie** : (f_n) converge vers 0 pour $\|\cdot\|_1$ mais **pas** pour $\|\cdot\|_\infty$ — la notion de convergence dépend de la norme, phénomène **propre à la dimension infinie**.

Réponse. $f_n(x) = x^n$: $\|f_n\|_\infty = 1$ et $\|f_n\|_1 \to 0$.

Correction de l'exercice 4 – Ouvert et fermé

— a) **Ouvert** : c'est la boule unité ouverte, image réciproque de $]-\infty\,;1[$ par l'application **continue** $(x, y) \mapsto x^2 + y^2$. Il n'est pas fermé (le point $(1, 0)$ est limite de points de A sans y appartenir).

— b) **Fermé** : image réciproque de $[0\,;+\infty[$ par la projection continue $(x, y) \mapsto x$. Il n'est pas ouvert : aucune boule centrée en $(0, 0)$ n'y est incluse.

— c) **Ni l'un ni l'autre** : le point $(1, 0)$ appartient à C mais aucune boule centrée en lui n'y est incluse (les points d'ordonnée négative en sortent), donc C n'est pas ouvert. Et $(0, 1)$ est limite de $\left(\frac{1}{n}, 1\right) \in C$ sans être dans C, donc C n'est pas fermé.

— **Méthode générale** : « inégalité **stricte** + fonction continue » donne un ouvert ; « inégalité **large** » donne un fermé ; un mélange des deux donne souvent ni l'un ni l'autre.

Réponse. a) ouvert · b) fermé · c) ni ouvert ni fermé.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l'exercice 5 – Adhérence et intérieur

— **Adhérence** : tout réel de $[0\,;1]$ est limite d'une suite de rationnels de $[0\,;1]$ (densité de $\mathbb{Q}$), donc $\overline{A} = [0\,;1]$.
— **Intérieur** : un intervalle ouvert non vide contient toujours un **irrationnel**, donc aucun ouvert non vide n'est inclus dans A : $\mathring{A} = \emptyset$.
— **Conclusion** : A n'est ni ouvert ni fermé ; il est **dense** dans $[0\,;1]$ et d'intérieur vide.
— **Frontière** : $\partial A = \overline{A} \setminus \mathring{A} = [0\,;1]$ tout entier — un ensemble peut donc être « tout frontière ».
— **Mesure** : A est dénombrable, donc de mesure nulle, alors que son adhérence est de mesure 1 — l'adhérence peut grossir énormément.

Réponse. $\overline{A} = [0\,;1]$ et $\mathring{A} = \emptyset$.

Correction de l'exercice 6 – Caractérisation séquentielle

— **Fermé** : F est l'image réciproque du **fermé** $\{1\}$ par l'application continue $(x, y) \mapsto xy$.
— **Preuve séquentielle** : si $(x_n, y_n) \in F$ converge vers (x, y), alors par continuité $x_n y_n \to xy$; or $x_n y_n = 1$, donc $xy = 1$ et la limite est dans F ✓
— **Non borné** : les points $\left(n, \frac{1}{n}\right)$ appartiennent à F et leur norme tend vers $+\infty$.
— **Conséquence** : F est fermé sans être **compact** — en dimension finie, compact équivaut à « fermé **et** borné » (Borel-Lebesgue).
— **Illustration** : c'est l'hyperbole $y = \frac{1}{x}$, qui « part à l'infini » le long de ses deux branches.

Réponse. Fermé (image réciproque de $\{1\}$) mais non borné.

Correction de l'exercice 7 – Application lipschitzienne

On utilise la **seconde inégalité triangulaire**.

— De $\|x\| = \|(x - y) + y\| \leq \|x - y\| + \|y\|$ on tire $\|x\| - \|y\| \leq \|x - y\|$.
— Par symétrie, $\|y\| - \|x\| \leq \|y - x\| = \|x - y\|$.
— En combinant :

$$| \|x\| - \|y\| | \leq \|x - y\|$$

— La norme est donc 1**-lipschitzienne**, donc **continue**.
— **Conséquence pratique** : si $x_n \to x$, alors $\|x_n\| \to \|x\|$ — on peut passer à la limite dans les normes.
— **Constante optimale** : avec $y = 0$, l'inégalité devient une égalité ; on ne peut pas faire mieux que 1.

Réponse. Seconde inégalité triangulaire : $|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|$.

Correction de l'exercice 8 – Continuité d'une application linéaire

— **Linéarité** : évidente par linéarité de l'intégrale.
— **Majoration** :

$$|\varphi(f)| = \left|\int_0^1 f\right| \leq \int_0^1 |f| \leq \|f\|_\infty$$

— φ est donc 1**-lipschitzienne**, donc **continue**, avec $|||\varphi||| \leq 1$.
— **Borne atteinte** : pour $f = \mathbf{1}$ (constante égale à 1), $\|f\|_\infty = 1$ et $\varphi(f) = 1$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

— **Conclusion** : $|||\varphi||| = 1$.
— **Contraste** : munie de $\|\cdot\|_1$, l'application $f \mapsto f(0)$ n'est **pas** continue (prendre des pics de plus en plus fins) — en dimension infinie, la continuité d'une forme linéaire dépend de la norme choisie.

Réponse. Continue, de norme d'opérateur 1.

Correction de l'exercice 9 – Norme d'opérateur matricielle

Formule : la norme subordonnée à $\|\cdot\|_\infty$ est le **maximum des sommes des valeurs absolues par ligne**.

$$|||A|||_\infty = \max_i \sum_j |a_{ij}|$$

— Ligne 1 : $|1| + |2| = 3$. Ligne 2 : $0 + 3 = 3$.
— Donc $|||A|||_\infty = 3$.
— **Vérification** : pour $x = (1, 1)$, $\|x\|_\infty = 1$ et $Ax = (3, 3)$, de norme 3 — la borne est atteinte ✓
— **Justification** : $|(Ax)_i| \le \sum_j |a_{ij}||x_j| \le \|x\|_\infty \sum_j |a_{ij}|$, et le choix $x_j = \text{signe}(a_{i_0 j})$ réalise l'égalité.
— **À comparer** : la norme subordonnée à $\|\cdot\|_1$ est le maximum des sommes **par colonne**, soit ici $\max(1, 5) = 5$.

Réponse. $|||A|||_\infty = 3$.

Correction de l'exercice 10 – Densité

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ quelconque. On approche A par des matrices inversibles.

— Considérons $A_t = A - tI$ pour t réel.
— $\det(A - tI) = (-1)^n \chi_A(t)$ est un **polynôme non nul** en t (de degré n), il a donc au plus n racines.
— Il existe donc une suite $t_k \to 0$ avec t_k **non racine**, c'est-à-dire A_{t_k} **inversible**.
— Or $\|A_{t_k} - A\| = |t_k|\,\|I\| \to 0$: $A_{t_k} \to A$.
— **Conclusion** : toute matrice est limite de matrices inversibles, donc $GL_n(\mathbb{R})$ est dense.
— **Usage classique** : démontrer une identité polynomiale (comme $\chi_{AB} = \chi_{BA}$) sur GL_n, puis l'étendre par **densité et continuité** à toutes les matrices.
— **Remarque topologique** : $GL_n(\mathbb{R})$ est aussi un **ouvert** (det est continue et det $\neq 0$ est une condition ouverte).

Réponse. $A - tI$ est inversible sauf pour au plus n valeurs de t.

Correction de l'exercice 11 – Suite dans un evn

— **Candidat limite** : pour chaque x fixé, $\frac{x^n}{n} \to 0$; la limite simple est la fonction nulle.
— **Convergence en norme** :

$$\|f_n - 0\|_\infty = \sup_{x \in [0;1]} \frac{x^n}{n} = \frac{1}{n}$$

le supremum étant atteint en $x = 1$.

— Comme $\frac{1}{n} \to 0$, la suite converge vers 0 **uniformément**.
— **Contraste avec** $g_n(x) = x^n$: $\|g_n\|_\infty = 1$ ne tend pas vers 0, bien que la limite simple soit nulle sur $[0\,;1[$ — il y a convergence simple **sans** convergence uniforme.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

— **Leçon** : la convergence pour $\|\cdot\|_\infty$ est exactement la **convergence uniforme** ; elle est strictement plus forte que la convergence simple.

Réponse. Oui : $\|f_n\|_\infty = \frac{1}{n} \to 0$, convergence uniforme vers 0.

Correction de l'exercice 12 – Une norme sur les polynômes par évaluation

a) Positivité, homogénéité et inégalité triangulaire viennent de celles de la valeur absolue. Séparation : si $N(P) = 0$, P s'annule en $0, 1, \dots, n$, soit $n+1$ points, avec $\deg P \le n$: $P = 0$.

b) Non : $P = X(X-1)\cdots(X-n)$ est non nul, de degré $n+1$, et $N(P) = 0$.

c) $|P(k)| \le \|P\|_\infty$ pour chaque $k \in [\![0, n]\!]$, d'où

$$N(P) \le (n+1)\|P\|_\infty$$

— L'autre inégalité résulte de l'équivalence des normes en dimension finie ($\dim \mathbb{R}_n[X] = n+1$). Explicitement, $P = \sum P(k) L_k$ (Lagrange) donne $\|P\|_\infty \le \max_k \|L_k\|_\infty \cdot N(P)$.

Réponse. N norme sur $\mathbb{R}_n[X]$ (pas sur $\mathbb{R}_{n+1}[X]$) ; $N \le (n+1)\|\cdot\|_\infty$ et $\|\cdot\|_\infty \le \max \|L_k\|_\infty N$.

Correction de l'exercice 13 – Boules unités des normes usuelles du plan

a) B_1 : carré de sommets $(\pm 1, 0)$, $(0, \pm 1)$ (losange) ; B_2 : disque unité ; B_∞ : carré $[-1, 1]^2$.

b) $\max(|x_1|, |x_2|)^2 \le x_1^2 + x_2^2 \le (|x_1| + |x_2|)^2$, et $|x_1| + |x_2| \le 2\max(|x_1|, |x_2|)$.

c) $\|x\| \le \|x\|'$ équivaut à $B' \subset B$:

$$B_1 \subset B_2 \subset B_\infty$$

— Constantes optimales : égalités pour e_1 (dans les premières inégalités) et pour $(1, 1)$ dans $\|x\|_1 \le 2\|x\|_\infty$; plus finement $\|x\|_1 \le \sqrt{2}\|x\|_2$ et $\|x\|_2 \le \sqrt{2}\|x\|_\infty$, avec égalité en $(1, 1)$.

Réponse. Losange $\subset$ disque $\subset$ carré ; $\|\cdot\|_\infty \le \|\cdot\|_2 \le \|\cdot\|_1 \le 2\|\cdot\|_\infty$.

Correction de l'exercice 14 – Distance à une partie

a) Pour $a \in A$: $d(x, A) \le \|x - a\| \le \|x - y\| + \|y - a\|$. En passant à l'inf sur a, $d(x, A) \le \|x - y\| + d(y, A)$, puis on échange x et y.

b) $d(x, A) = 0 \Leftrightarrow$ il existe $a_k \in A$ avec $\|x - a_k\| \to 0 \Leftrightarrow x \in \overline{A}$ (caractérisation séquentielle de l'adhérence).

c) $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$: $d(\sqrt{2}, \mathbb{Q}) = 0$ bien que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. Et

$$d(2,]0, 1[) = \inf_{0 < a < 1} (2 - a) = 1$$

— borne non atteinte (l'intervalle n'est pas fermé).

Réponse. $d(\cdot, A)$ est 1-lipschitzienne ; $d(x, A) = 0 \Leftrightarrow x \in \overline{A}$; $d(\sqrt{2}, \mathbb{Q}) = 0$, $d(2,]0, 1[) = 1$.

Correction de l'exercice 15 – Synthèse : boules et convexité

a) Soient $x, y \in B(a, r)$ et $t \in [0\,;1]$. On pose $z = tx + (1-t)y$.

$$\|z - a\| = \|t(x-a) + (1-t)(y-a)\| \le t\|x-a\| + (1-t)\|y-a\| < tr + (1-t)r = r$$

— Donc $z \in B(a, r)$: la boule est **convexe**.

— **Réciproque utile** : si l'ensemble $\{N \le 1\}$ n'est **pas** convexe, alors N n'est pas une norme (critère de rejet rapide).

b) **Vérification des axiomes de N.**

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

— **Positivité et séparation** : $N(x,y) = 0$ impose $|x| = 0$ et $|x+y| = 0$, donc $x = 0$ puis $y = 0$ ✓
— **Homogénéité** : $N(\lambda x, \lambda y) = \max(|\lambda x|, |\lambda x + \lambda y|) = |\lambda| N(x,y)$ ✓
— **Triangulaire** : $|x + x'| \leq |x| + |x'| \leq N(u) + N(u')$ et de même pour la seconde composante, donc le max est majoré par $N(u) + N(u')$ ✓
— N est bien une **norme** ; c'est $\|\cdot\|_\infty$ composée avec l'automorphisme $(x,y) \mapsto (x, x+y)$.
— **Boule unité** : $|x| \leq 1$ et $|x+y| \leq 1$ décrivent un **parallélogramme**, image du carré unité par cet automorphisme — convexe ✓

Réponse. a) inégalité triangulaire sur $t(x-a) + (1-t)(y-a)$ · b) N est une norme.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).