Plaquette 2 – Normes usuelles : vérifications, comparaisons, non-équivalence

Espaces vectoriels normés — Prépa MP / MPI (2e année)

Corrections détaillées

Boîte à outils

Normes de référence.

— $\mathbb{R}^n$: $\|x\|_\infty \le \|x\|_2 \le \|x\|_1 \le n\|x\|_\infty$, et plus finement $\|x\|_1 \le \sqrt{n}\|x\|_2$, $\|x\|_2 \le \sqrt{n}\|x\|_\infty$.

— $C([0,1])$: $\|f\|_1 \le \|f\|_2 \le \|f\|_\infty$, sans inégalité inverse.

— N_1, N_2 **équivalentes** $\Leftrightarrow \exists \alpha, \beta > 0$:

$$\alpha N_1 \le N_2 \le \beta N_1$$

— En dimension finie, toutes les normes sont équivalentes.

— **Non-équivalence** : trouver (f_n) avec $\dfrac{N_2(f_n)}{N_1(f_n)} \to +\infty$.

— Une forme quadratique définie positive q donne la norme $\sqrt{q}$, encadrée par $\sqrt{\lambda_{\min}}\|\cdot\|_2$ et $\sqrt{\lambda_{\max}}\|\cdot\|_2$.

Correction de l'exercice 1 – Une norme définie par une valeur absolue

a) Pour des réels a, b : $|a+b| + |a-b| = 2\max(|a|,|b|)$ (si $|a| \ge |b|$, $a+b$ et $a-b$ sont du signe de a, et la somme des valeurs absolues vaut $2|a|$).

b) $N = 2\|\cdot\|_\infty$ est une norme. Boule unité : le carré $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]^2$.

c) $\|x\|_\infty \le \|x\|_1 \le 2\|x\|_\infty$, donc

$$\|x\|_1 \le N(x) \le 2\|x\|_1$$

— avec égalités pour $(1,1)$ et $(1,0)$ respectivement.

Réponse. $N = 2\|\cdot\|_\infty$; $\|\cdot\|_1 \le N \le 2\|\cdot\|_1$.

Correction de l'exercice 2 – Norme issue d'une forme quadratique

a) $S = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$, de valeurs propres $\frac{1}{2}$ (vecteur $(1,-1)$) et $\frac{3}{2}$ (vecteur $(1,1)$), strictement positives.

b) $\langle X, Y\rangle_S = X^{\mathsf{T}} S Y$ est un produit scalaire, et N est la norme associée.

c) Rayleigh : $\frac{1}{2}\|X\|_2^2 \le X^{\mathsf{T}} S X \le \frac{3}{2}\|X\|_2^2$, d'où

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\|X\|_2 \le N(X) \le \sqrt{\frac{3}{2}}\|X\|_2$$

— avec égalités respectivement en $(1,-1)$ et $(1,1)$.

Réponse. S de valeurs propres $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$; $\frac{1}{\sqrt{2}}\|\cdot\|_2 \le N \le \sqrt{\frac{3}{2}}\|\cdot\|_2$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l'exercice 3 – Une norme sur les fonctions de classe C^1

a) Inégalité triangulaire et homogénéité sont claires. Si $N(f) = 0$, alors $f' = 0$ et $f(0) = 0$, donc $f = 0$.

b) $f(x) = f(0) + \int_0^x f'$, donc

$$|f(x)| \le |f(0)| + x\|f'\|_\infty \le N(f)$$

c) Avec $f_n(x) = x^n$: $\|f_n\|_\infty = 1$ et $N(f_n) = 0 + n = n$. Le rapport $\dfrac{N(f_n)}{\|f_n\|_\infty} = n$ n'est pas borné.

Réponse. $\|\cdot\|_\infty \le N$; $f_n = x^n$ donne $N(f_n) = n$ et $\|f_n\|_\infty = 1$: non équivalentes.

Correction de l'exercice 4 – Normes 1, 2 et infinie sur les fonctions continues

a) Cauchy-Schwarz : $\int_0^1 |f| \cdot 1 \le \|f\|_2 \|1\|_2 = \|f\|_2$. Et $\int_0^1 f^2 \le \|f\|_\infty^2$.

b) $\|f_n\|_1 = \dfrac{1}{n+1}$, $\|f_n\|_2 = \dfrac{1}{\sqrt{2n+1}}$, $\|f_n\|_\infty = 1$.

c) Les rapports

$$\frac{\|f_n\|_\infty}{\|f_n\|_2} = \sqrt{2n+1}, \qquad \frac{\|f_n\|_2}{\|f_n\|_1} = \frac{n+1}{\sqrt{2n+1}}$$

— tendent vers $+\infty$: aucune inégalité inverse n'est possible.

Réponse. $\|\cdot\|_1 \le \|\cdot\|_2 \le \|\cdot\|_\infty$; x^n a pour normes $\dfrac{1}{n+1}$, $\dfrac{1}{\sqrt{2n+1}}$, 1.

Correction de l'exercice 5 – Les normes p sur $\mathbb{R}^n$

a) Un terme vaut $\|x\|_\infty^p$ et chacun des n termes est $\le \|x\|_\infty^p$:

$$\|x\|_\infty^p \le \sum |x_i|^p \le n\|x\|_\infty^p$$

b) $n^{1/p} \to 1$ et le théorème d'encadrement conclut.

c) $\|(3,4)\|_1 = 7$, $\|(3,4)\|_2 = 5$, et la limite vaut $\|(3,4)\|_\infty = 4$ (par exemple $\|(3,4)\|_3 = 91^{1/3} \approx 4{,}50$).

Réponse. $\|x\|_\infty \le \|x\|_p \le n^{1/p}\|x\|_\infty$; $\|x\|_p \to \|x\|_\infty$; 7, 5, 4.

Correction de l'exercice 6 – Normes sur les matrices

a) Chaque somme de ligne est entre $\max_j |a_{ij}|$ et $n \max_j |a_{ij}|$. Égalités : $A = E_{11}$ et $A = J$ (matrice de 1).

b) $\sum_j |(AB)_{ij}| \le \sum_k |a_{ik}| \sum_j |b_{kj}| \le \|A\|\|B\|$. Pour N : $J^2 = nJ$, donc

$$N(J^2) = n > 1 = N(J)^2 \quad (n \ge 2)$$

c) Non : $E_{12} \neq 0$ a une trace nulle et un rayon spectral nul (nilpotente). Ni l'une ni l'autre ne sépare.

Réponse. $N \le \|\cdot\| \le nN$; $\|\cdot\|$ sous-multiplicative, pas N ; $|\mathrm{tr}|$ et ρ ne sont pas des normes.

Correction de l'exercice 7 – Coefficients et norme uniforme d'un polynôme

a) Pour $|x| \le 1$: $|P(x)| \le \sum |a_k| |x|^k \le N(P)$.

b) Équivalence des normes en dimension finie.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

c) $N(T_3) = 4 + 3 = 7$ et $\|T_3\| = 1$ (car $T_3(\cos\theta) = \cos 3\theta$), donc

$$C_3 \geq \frac{N(T_3)}{\|T_3\|} = 7$$

— Le coefficient dominant de T_n est 2^{n-1}, donc $C_n \geq 2^{n-1}$: la constante d'équivalence explose avec la dimension, ce qui annonce la non-équivalence sur $\mathbb{R}[X]$.

Réponse. $\|P\| \leq N(P)$; $N(T_3) = 7$, $\|T_3\| = 1$: $C_3 \geq 7$, $C_n \geq 2^{n-1}$.

Correction de l'exercice 8 – Norme uniforme pondérée

a) Homogénéité et inégalité triangulaire passent au sup. Séparation : $e^{-x} > 0$, donc $N(f) = 0 \Rightarrow f = 0$.

b) $e^{-1} \leq e^{-x} \leq 1$ sur $[0,1]$: on multiplie par $|f(x)|$ et on passe au sup :

$$e^{-1}\|f\|_\infty \leq N(f) \leq \|f\|_\infty$$

— Les deux normes sont équivalentes (le poids est minoré par une constante > 0).

c) $|f|e^{-x} = e^x$, de sup e ; $\|f\|_\infty = e^2$. Et $e^{-1}e^2 = e \leq e \leq e^2$ ✓ (égalité à gauche).

Réponse. $e^{-1}\|\cdot\|_\infty \leq N \leq \|\cdot\|_\infty$; $N(e^{2x}) = e$.

Correction de l'exercice 9 – Un poids qui s'annule

a) Si $N(f) = 0$, la fonction continue positive $x|f(x)|$ est nulle sur $[0,1]$, donc $f = 0$ sur $]0,1]$, puis en 0 par continuité.

b) $x \leq 1$ sur $[0,1]$.

c) $\|f_n\|_1 = \frac{1}{2n}$ (aire d'un triangle de base $\frac{1}{n}$, de hauteur 1) et

$$N(f_n) = \int_0^{1/n} x(1 - nx)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2n^2} - \frac{n}{3n^3} = \frac{1}{6n^2}$$

— d'où $\dfrac{\|f_n\|_1}{N(f_n)} = 3n \to +\infty$.

Réponse. N norme (continuité en 0) ; $N \leq \|\cdot\|_1$; rapport $3n$: non équivalentes.

Correction de l'exercice 10 – Suites à support fini

a) Le max est l'un des termes de la somme de nombres positifs.

b) $v^{(n)} = (1, \ldots, 1, 0, \ldots)$ (n termes égaux à 1) : $\|v^{(n)}\|_\infty = 1$ et $\|v^{(n)}\|_1 = n$.

c) $\|u^{(n)}\|_\infty = 1$ (bornée), mais

$$\|u^{(n)}\|_1 = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \sim \ln n \to +\infty$$

— La notion de partie bornée dépend de la norme en dimension infinie.

Réponse. $\|\cdot\|_\infty \leq \|\cdot\|_1$; $v^{(n)}$: rapport n ; $u^{(n)}$ bornée pour ∞, pas pour 1.

Correction de l'exercice 11 – Cas d'égalité dans l'inégalité triangulaire

a) En élevant au carré : égalité $\Leftrightarrow \langle x, y\rangle = \|x\|\|y\|$, cas d'égalité de Cauchy-Schwarz avec produit scalaire positif : $x = \lambda y$, $\lambda \geq 0$.

b) $x = (1,0)$, $y = (0,1)$: $\|x + y\|_1 = 2 = \|x\|_1 + \|y\|_1$, alors que x et y ne sont pas colinéaires.

c) Pour $t \in [0,1]$, $\|(1-t)x + ty\|_1 = 1$: tout le segment $[x, y]$ est sur la sphère unité. Pour

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

la norme euclidienne, a) montre que

$$\left\| \frac{x+y}{2} \right\|_2 < 1 \quad \text{si } \|x\|_2 = \|y\|_2 = 1,\ x \neq y$$

— (norme strictement convexe).

Réponse. Égalité euclidienne ssi colinéarité positive ; pour $\|\cdot\|_1$, $(1,0)$ et $(0,1)$; la sphère $\|\cdot\|_1$ contient des segments.

Correction de l'exercice 12 – Une norme à boule hexagonale

a) Maximum de trois semi-normes ($|x|$, $|y|$, $|x+y|$) : homogénéité et inégalité triangulaire sont conservées. Séparation : $N = 0 \Rightarrow x = y = 0$.

b) $N \leq 1 \Leftrightarrow |x| \leq 1,\ |y| \leq 1,\ |x+y| \leq 1$: intersection du carré $[-1,1]^2$ et de la bande $|x+y| \leq 1$, soit l'hexagone de sommets

$$(1,0),\ (0,1),\ (-1,1),\ (-1,0),\ (0,-1),\ (1,-1)$$

c) $\|\cdot\|_\infty \leq N \leq 2\|\cdot\|_\infty$ (car $|x+y| \leq 2\max(|x|,|y|)$), égalités en $(1,-1)$ et $(1,1)$.

Réponse. Boule unité : hexagone de sommets $(\pm 1, 0)$, $(0, \pm 1)$, $\pm(-1,1)$; $\|\cdot\|_\infty \leq N \leq 2\|\cdot\|_\infty$.

Correction de l'exercice 13 – Des applications qui ne sont pas des normes

a) Non : $N_1(1,0) = 0$ avec $(1,0) \neq 0$ (pas de séparation).

b) Non : l'inégalité triangulaire échoue. Avec $u = (1,0)$ et $v = (0,1)$:

$$N_2(u+v) = (1+1)^2 = 4 > 2 = N_2(u) + N_2(v)$$

— (sa « boule unité » n'est pas convexe).

c) Oui : c'est $\|(x,2y)\|_1$, composée de la norme $\|\cdot\|_1$ et d'une application linéaire injective.

Réponse. N_1 : pas de séparation ; N_2 : inégalité triangulaire fausse ($4 > 2$) ; N_3 est une norme.

Correction de l'exercice 14 – Norme image par une application linéaire

a) Homogénéité et inégalité triangulaire se transportent par linéarité de u. Séparation : $N(u(x)) = 0 \Leftrightarrow u(x) = 0$, donc $N \circ u$ sépare si et seulement si $\ker u = \{0\}$.

b) $u : P \mapsto (P(0), P'(0), P''(0))$ est injective sur $\mathbb{R}_2[X]$ (formule de Taylor : $P = P(0) + P'(0)X + \frac{P''(0)}{2}X^2$), et l'on compose avec $\|\cdot\|_1$ de $\mathbb{R}^3$.

c) Non : $u(X^3) = (0,0,0)$ alors que $X^3 \neq 0$:

$$\ker u = \mathbb{R}X^3 \neq \{0\}$$

Réponse. $N \circ u$ norme ssi u injective ; oui sur $\mathbb{R}_2[X]$, non sur $\mathbb{R}_3[X]$ (X^3).

Correction de l'exercice 15 – Synthèse : trois normes sur les polynômes de degré au plus 2

a) Comme pour les normes d'évaluation : séparation car un polynôme de degré ≤ 2 nul en trois points est nul. Et chaque $|P(t)| \leq \|P\|$.

b) $|P(x)| \leq \sum |P(t_k)||L_k(x)| \leq M(P)\sum |L_k(x)|$:

$$\|P\| \leq \Lambda M(P)$$

c) En $x = \frac{1}{4}$: $L_0 = \frac{3}{8}$, $L_1 = \frac{3}{4}$, $L_2 = -\frac{1}{8}$. On choisit les signes $P(0) = 1$, $P\left(\frac{1}{2}\right) = 1$, $P(1) = -1$,

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

soit $P = L_0 + L_1 - L_2$: $P\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{3}{8} + \frac{3}{4} + \frac{1}{8} = \frac{5}{4}$ et $M(P) = 1$, donc $\|P\| \geq \frac{5}{4}$, et finalement $\|P\| = \frac{5}{4}$.

d) $M \leq \|\cdot\| \leq \frac{5}{4}M$, constantes optimales (égalité à gauche pour $P = 1$).

Réponse. $M \leq \|\cdot\| \leq \frac{5}{4}M$, optimal ($P = 1$ et $P = L_0 + L_1 - L_2$).

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).