Plaquette 3 – Topologie d'un evn : ouverts, fermés, adhérence, densité

Espaces vectoriels normés — Prépa MP / MPI (2e année)

Corrections détaillées

Boîte à outils

Ouverts et fermés.

- $f : E \to \mathbb{R}$ continue : $f^{-1}(]a, +\infty[)$ ouvert, $f^{-1}([a, +\infty[)$ et $f^{-1}(\{a\})$ fermés.
- Réunion quelconque d'ouverts, intersection finie d'ouverts : ouvert (et dualement pour les fermés).
- $\overline{A}$ = ensemble des limites de suites de $A = \{x \mid d(x, A) = 0\}$; $\mathring{A}$ = plus grand ouvert inclus dans A.
- Dans un evn, pour $r > 0$:

$$\overline{B(a,r)} = B_f(a,r), \qquad \mathring{B}_f(a,r) = B(a,r)$$

- Un sous-espace de dimension finie est fermé ; l'adhérence d'un sous-espace est un sous-espace.
- Une forme linéaire φ est continue si et seulement si $\ker\varphi$ est fermé ; sinon $\ker\varphi$ est **dense**.
- A dense dans $E \Leftrightarrow \overline{A} = E \Leftrightarrow$ tout point est limite d'une suite de A.

Correction de l'exercice 1 – Ouvert ou fermé ? Parties du plan

a) $A = f^{-1}(]1, +\infty[)$ avec $f(x, y) = xy$ continue : ouvert. B est l'intersection des fermés $\{x^2 + y^2 \leq 1\}$ et $\{y \geq 0\}$: fermé.

b) C n'est pas ouvert : le point $(1, 0) \in C$, mais $\left(1 + \frac{1}{n}, 0\right) \notin C$ tend vers lui. Pas fermé : $\left(\frac{1}{n}, 0\right) \in C$ tend vers $(0, 0) \notin C$.

c) Non : avec $x_n = \frac{1}{n\pi}$, les points $(x_n, \sin(n\pi)) = (x_n, 0) \in D$ tendent vers

$$(0, 0) \notin D$$

— D n'est pas fermé (son adhérence contient le segment $\{0\} \times [-1, 1]$).

Réponse. A ouvert, B fermé, C ni l'un ni l'autre, D non fermé.

Correction de l'exercice 2 – Le groupe linéaire est un ouvert dense

a) $GL_n(\mathbb{R}) = \det^{-1}(\mathbb{R}^*)$, image réciproque d'un ouvert par l'application continue (polynomiale) det.

b) $\det\left(A - \frac{1}{k}I\right)$ est, au signe près, $\chi_A\left(\frac{1}{k}\right)$, non nul pour k assez grand (χ_A a un nombre fini de racines). Donc $A - \frac{1}{k}I \in GL_n$ et tend vers A.

c) $\det^{-1}(\{1\})$ est fermé. Pas ouvert : I est dans l'ensemble, mais

$$\det\left(\left(1 + \frac{1}{k}\right)I\right) = \left(1 + \frac{1}{k}\right)^n \neq 1$$

— alors que $\left(1 + \frac{1}{k}\right)I \to I$.

Réponse. $GL_n = \det^{-1}(\mathbb{R}^*)$ ouvert, dense ; SL_n fermé non ouvert.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l'exercice 3 – Fermés de matrices

a) A nilpotente $\Leftrightarrow A^n = 0$, et $A \mapsto A^n$ est continue : N est l'image réciproque de $\{0\}$.

b) $\mathrm{rg} A \leq r \Leftrightarrow$ tous les mineurs d'ordre $r+1$ sont nuls. Chaque mineur est une fonction polynomiale des coefficients, donc continue : intersection finie de fermés.

c) Ni l'un ni l'autre. Pas fermé : $\frac{1}{k}E_{11}$ est de rang 1 et tend vers 0 de rang 0 (pour $r = 1$; en général $\frac{1}{k}J_r$). Pas ouvert : $J_r = \mathrm{diag}(I_r, 0)$ est limite de

$$\mathrm{diag}\left(I_r, \frac{1}{k}I_{n-r}\right)$$

— de rang $n \neq r$.

Réponse. $N = \{A^n = 0\}$ fermé ; $\{\mathrm{rg} \leq r\}$ fermé (mineurs) ; $\{\mathrm{rg} = r\}$ ni ouvert ni fermé.

Correction de l'exercice 4 – Intérieur des diagonalisables de $M_2(\mathbb{R})$

a) $\Delta > 0$: deux valeurs propres réelles distinctes, diagonalisable. Si $A \in D$ et $\Delta(A) = 0$, la valeur propre est double et A, diagonalisable, est scalaire ; $\Delta < 0$ est exclu.

b) $\{\Delta > 0\}$ est ouvert et inclus dans D. Une matrice scalaire λI n'est pas intérieure : $\lambda I + \varepsilon E_{12}$ n'est pas diagonalisable.

c) $D \subset \{\Delta \geq 0\}$ fermé. Réciproquement, si $\Delta(A) = 0$, A est trigonalisable : $A \sim \begin{pmatrix} \lambda & b \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$, limite de

$$\begin{pmatrix} \lambda & b \\ 0 & \lambda + \frac{1}{k} \end{pmatrix} \in D$$

Réponse. $\overset{\circ}{D} = \{\Delta > 0\}$, $\overline{D} = \{\Delta \geq 0\}$.

Correction de l'exercice 5 – Adhérence, intérieur, frontière dans R

a) $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$ (densité) et $\overset{\circ}{\mathbb{Q}} = \varnothing$ (tout intervalle contient des irrationnels). De même pour $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Frontière : $\mathbb{R}$ dans les deux cas.

b) $\overline{A} = A \cup \{0\}$ ($\frac{1}{n} \to 0$, et un point $x \notin A \cup \{0\}$ est à distance > 0 de A), $\overset{\circ}{A} = \varnothing$, frontière $A \cup \{0\}$.

c) $\overline{B} = [0,1] \cup \{2\}$, $\overset{\circ}{B} =]0,1[$, frontière

$$\mathrm{Fr}B = \overline{B} \setminus \overset{\circ}{B} = \{0, 1, 2\}$$

Réponse. $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$, $\overset{\circ}{\mathbb{Q}} = \varnothing$; $\overline{A} = A \cup \{0\}$; $\mathrm{Fr}B = \{0,1,2\}$.

Correction de l'exercice 6 – Un hyperplan dense

a) $\|P_n\| = \frac{1}{2^n} \to 0$ mais $\varphi(P_n) = 1 \not\to 0$.

b) $R_n = P - \frac{P(2)}{2^n}X^n$ vérifie $R_n(2) = 0$, donc $R_n \in H$, et

$$\|P - R_n\| = \frac{|P(2)|}{2^n}\|X^n\| = \frac{|P(2)|}{2^n} \to 0$$

c) En dimension finie, toute forme linéaire est continue et tout hyperplan est fermé, donc jamais dense. En dimension infinie, un hyperplan est soit fermé (forme continue), soit dense.

Réponse. φ non continue ; $P - \frac{P(2)}{2^n}X^n \in H$ tend vers P : H dense.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l'exercice 7 – Boule ouverte et boule fermée

a) $B_f(a,r)$ est fermé et contient $B(a,r)$, d'où $\subset$. Pour $\|x-a\| = r$: $x_t = a + t(x-a) \in B(a,r)$ pour $t < 1$ et $x_t \to x$.

b) $B(a,r)$ est un ouvert inclus dans $B_f(a,r)$. Si $\|x-a\| = r$, tout voisinage de x contient $a + (1+\varepsilon)(x-a)$, hors de la boule fermée : x n'est pas intérieur.

c) Pour la distance discrète ($d(x,y) = 1$ si $x \neq y$), $B(a,1) = \{a\}$, fermé, donc

$$\overline{B(a,1)} = \{a\} \neq B_f(a,1) = E$$

Réponse. $\overline{B(a,r)} = B_f(a,r)$ et $\mathring{B}_f(a,r) = B(a,r)$ dans un evn ; faux pour la distance discrète.

Correction de l'exercice 8 – Adhérence d'un sous-espace

a) Si $x = \lim x_k$ et $y = \lim y_k$ avec $x_k, y_k \in F$, alors $\lambda x + y = \lim(\lambda x_k + y_k)$ et $\lambda x_k + y_k \in F$.

b) Si $B(a,r) \subset F$, alors pour tout $z \neq 0$, $a + \frac{r}{2\|z\|} z \in F$, donc $z \in F$: $F = E$.

c) Weierstrass : $\overline{\mathbb{R}[X]} = C([0,1])$. Comme $e^x \notin \mathbb{R}[X]$ (sinon ses dérivées s'annuleraient à partir d'un rang),

$$\overline{\mathbb{R}[X]} \neq \mathbb{R}[X]$$

— et par b), son intérieur est vide.

Réponse. $\overline{F}$ sous-espace ; $\mathring{F} = \varnothing$ si $F \neq E$; $\mathbb{R}[X]$ dense non fermé dans $C([0,1])$.

Correction de l'exercice 9 – Somme de deux fermés

a) $U + A = \bigcup_{a \in A} (U + a)$, réunion de translatés d'ouverts.

b) Si $\mathbb{Z} + \sqrt{2}\mathbb{Z} = a\mathbb{Z}$, alors $1 = pa$ et $\sqrt{2} = qa$ avec p, q entiers, d'où $\sqrt{2} = \frac{q}{p} \in \mathbb{Q}$: absurde. Un sous-groupe de $\mathbb{R}$ qui n'est pas monogène est dense.

c) $\mathbb{Z}$ et $\sqrt{2}\mathbb{Z}$ sont fermés, leur somme est dense et différente de $\mathbb{R}$ (dénombrable) :

$$\overline{\mathbb{Z} + \sqrt{2}\mathbb{Z}} = \mathbb{R} \neq \mathbb{Z} + \sqrt{2}\mathbb{Z}$$

Réponse. $U + A$ ouvert ; $\mathbb{Z} + \sqrt{2}\mathbb{Z}$ dense, donc somme de fermés non fermée.

Correction de l'exercice 10 – Ouvert défini par des inégalités strictes

a) Intersection des ouverts $f^{-1}(]-\infty, 2[)$ et $g^{-1}(]0, +\infty[)$ avec $f(x,y) = x^2 + y^2$ et $g(x,y) = y - x^2$ continues.

b) Le second ensemble K est fermé et contient Ω, d'où $\overline{\Omega} \subset K$. Réciproquement, soit $p \in K$ et $c = (0,1) \in \Omega$. Pour $t \in]0,1]$, $p_t = (1-t)p + tc$ vérifie, par convexité de f et concavité de g : $f(p_t) \leq (1-t)f(p) + tf(c) < 2$ (car $f(c) = 1 < 2$) et $g(p_t) \geq (1-t)g(p) + tg(c) > 0$ (car $g(c) = 1$). Donc $p_t \in \Omega$ et $p_t \to p$ quand $t \to 0$.

c) $y = x^2$ et $x^2 + y^2 = 2$ donnent $y + y^2 = 2$, soit $y = 1$ (la racine $y = -2$ est exclue par $y = x^2 \geq 0$) :

$$(x,y) = (\pm 1, 1)$$

Réponse. Ω ouvert ; $\overline{\Omega}$ = inégalités larges ; frontières qui se coupent en $(\pm 1, 1)$.

Correction de l'exercice 11 – Matrices de rang 1 en taille 2

a) En taille 2, rang $1 \Leftrightarrow A \neq 0$ et A non inversible.

b) $\overline{R_1} = \{\det = 0\}$: c'est un fermé contenant R_1, et $0 = \lim \frac{1}{k} E_{11}$. Intérieur vide : $A \in R_1$

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

est limite de $A + \frac{1}{k}B$ inversibles (densité de GL_2, avec B convenable).

c) $Z = \{\det = 0\} = \det^{-1}(\{0\})$ est fermé, et son complémentaire GL_2 est dense : aucune boule n'est incluse dans Z, d'où

$$\mathring{Z} = \varnothing$$

Réponse. $\overline{R_1} = \{\det = 0\}$, d'intérieur vide.

Correction de l'exercice 12 – Adhérence d'un convexe

a) Si $x = \lim x_k$, $y = \lim y_k$ avec $x_k, y_k \in C$, alors $(1-t)x + ty = \lim((1-t)x_k + ty_k) \in \overline{C}$.

b) Soit $z = (1-t)x + ty$ et w avec $\|w - z\| < (1-t)r$. On écrit $w = (1-t)x' + ty$ avec $x' = x + \frac{w-z}{1-t} \in B(x, r) \subset C$, donc $w \in C$ par convexité. Si x, y sont intérieurs, le segment l'est.

c) $\mathbb{Q}$ n'est pas convexe dans $\mathbb{R}$ (il ne contient pas $\frac{\sqrt{2}}{2} \in [0,1]$), mais

$$\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$$

— est convexe.

Réponse. $\overline{C}$ et $\mathring{C}$ convexes ; $\mathbb{Q}$ non convexe d'adhérence $\mathbb{R}$.

Correction de l'exercice 13 – La sphère unité de l'espace des fonctions continues

a) $S = N^{-1}(\{1\})$ avec N continue (1-lipschitzienne). $P = \bigcap_x \{f \mid f(x) \geq 0\}$ et $f \mapsto f(x)$ est continue pour $\|\cdot\|_\infty$.

b) Si $f \geq m > 0$, la boule $B(f, m)$ est incluse dans P. Réciproquement, si $\min f = 0$, alors $f - \varepsilon \notin P$. Donc

$$\mathring{P} = \{f \mid \min_{[0,1]} f > 0\}$$

c) Non : pour toute $f \in P$ et $\varepsilon > 0$, on retranche à f un pic étroit de hauteur $\|f\|_\infty + 1$ et de base de largeur δ ; la fonction obtenue n'est pas positive et est à distance $\leq \frac{\delta}{2}(\|f\|_\infty + 1) < \varepsilon$ pour la norme 1. Ainsi $\mathring{P} = \varnothing$ pour $\|\cdot\|_1$.

Réponse. S, P fermés ; $\mathring{P} = \{\min f > 0\}$ pour $\|\cdot\|_\infty$, vide pour $\|\cdot\|_1$.

Correction de l'exercice 14 – Adhérence d'un ensemble de sommes d'inverses

a) $\frac{1}{n} + \frac{1}{m} \to \frac{1}{n}$ quand $m \to +\infty$, et $\frac{2}{n} \to 0$.

b) Soit $x = \lim\left(\frac{1}{n_k} + \frac{1}{m_k}\right)$. Si (n_k) et (m_k) sont bornées, elles prennent un nombre fini de valeurs et $x \in A$. Si l'une tend vers $+\infty$ (le long d'une sous-suite), x est de la forme $\frac{1}{n}$ ou 0. D'où l'inclusion, et a) donne l'autre.

c) Non : $0 \notin A$ et $\frac{1}{n}$ n'est pas toujours dans A. Par exemple

$$1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \in A, \qquad \text{mais } 0 \in \overline{A} \setminus A$$

Réponse. $\overline{A} = A \cup \{0\} \cup \{\frac{1}{n}\}$; A n'est pas fermé ($0 \notin A$).

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l’exercice 15 – Synthèse : un domaine du plan

a) Intersection de deux fermés (images réciproques de $[0,+\infty[$ et $]-\infty,2]$) ; inclus dans la boule de rayon $\sqrt{2}$.

b) $\{y \geq x^2\}$ est convexe (épigraphe d’une fonction convexe) et le disque est convexe ; l’intersection aussi.

c) $\overset{\circ}{K} = \{y > x^2,\ x^2+y^2 < 2\}$ (ouvert inclus dans K, et tout point d’égalité est limite de points extérieurs). La frontière est formée de l’arc de parabole $y = x^2$, $|x| \leq 1$, et de l’arc de cercle $x^2+y^2 = 2$ entre $(-1,1)$ et $(1,1)$:

$$\mathrm{Fr}K = K \setminus \overset{\circ}{K}$$

d) $\max y = \sqrt{2}$, atteint en $(0,\sqrt{2})$; $\max x = 1$, atteint en $(1,1)$ (sur K, $x^2 \leq y$ et $x^2+y^2 \leq 2$ donnent $x^2+x^4 \leq 2$, soit $x^2 \leq 1$).

Réponse. K fermé, borné, convexe ; frontière : arc de parabole et arc de cercle ; $\max y = \sqrt{2}$, $\max x = 1$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).