Plaquette 4 – Applications linéaires continues et normes subordonnées

Espaces vectoriels normés — Prépa MP / MPI (2e année)

Exercices

Méthode

Une application linéaire $u : E \to F$ est continue si et seulement s'il existe C avec $\|u(x)\| \leq C\|x\|$; la plus petite constante est la **norme subordonnée** $\|u\|$. Pour la calculer : **(1)** majorer $\|u(x)\|$ par $C\|x\|$; **(2)** trouver un vecteur (ou une suite de vecteurs) pour lequel le rapport atteint (ou approche) C. Pour montrer qu'une application linéaire **n'est pas** continue, on exhibe une suite (x_n) de norme 1 avec $\|u(x_n)\| \to +\infty$. En dimension finie, toute application linéaire est continue, mais la valeur de sa norme dépend des normes choisies.

Exercice 1 – La norme subordonnée à la norme infinie

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$, $\mathbb{R}^n$ muni de $\|\cdot\|_\infty$.

a) Montrer que $\|AX\|_\infty \leq \left(\max_i \sum_j |a_{ij}|\right)\|X\|_\infty$.

b) Montrer que l'égalité est atteinte en choisissant X de coordonnées ± 1 convenables.

c) Calculer $\|A\|_\infty$ pour $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 4 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 2 – La norme subordonnée à la norme 1

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$, $\mathbb{R}^n$ muni de $\|\cdot\|_1$.

a) Montrer que $\|AX\|_1 \leq \left(\max_j \sum_i |a_{ij}|\right)\|X\|_1$.

b) Montrer que l'égalité est atteinte en un vecteur de la base canonique.

c) Calculer $\|A\|_1$ pour la matrice de l'exercice précédent, et vérifier $\rho(A) \leq \min\left(\|A\|_1, \|A\|_\infty\right)$ sachant que $\rho(A) \approx 3{,}46$.

Exercice 3 – La forme linéaire intégrale

Sur $E = C([0,1])$, soit $\varphi(f) = \int_0^1 f$ et $\psi(f) = f(0)$.

a) Montrer que φ est continue pour $\|\cdot\|_\infty$ et pour $\|\cdot\|_1$, et calculer sa norme dans chaque cas.

b) Montrer que ψ est continue pour $\|\cdot\|_\infty$, de norme 1.

c) Montrer que ψ n'est pas continue pour $\|\cdot\|_1$.

Exercice 4 – La dérivation n'est pas continue

Sur $E = \mathbb{R}[X]$ muni de $\|P\| = \sup_{[0,1]} |P|$, soit $D : P \mapsto P'$.

a) Calculer $\|X^n\|$ et $\|D(X^n)\|$.

b) En déduire que D n'est pas continue.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

c) Montrer que D est continue de (E, N) dans $(E, \|\cdot\|)$, où $N(P) = \|P\| + \|P'\|$.

Exercice 5 – Opérateur de multiplication

Soit $g \in C([0,1])$ et $M_g : f \mapsto gf$ sur $(C([0,1]), \|\cdot\|_\infty)$.

a) Montrer que M_g est continue et que $\|M_g\| \leq \|g\|_\infty$.
b) Montrer que $\|M_g\| = \|g\|_\infty$.
c) Calculer $\|M_g\|$ pour $g(x) = x(1-x)$ et donner les valeurs propres de M_g (s'il y en a).

Exercice 6 – L'opérateur de primitivation

Soit $T : f \mapsto \left(x \mapsto \int_0^x f\right)$ sur $C([0,1])$.

a) Montrer que $\|T\| = 1$ pour $\|\cdot\|_\infty$.
b) Montrer que $\|Tf\|_1 \leq \|f\|_1$, puis que $\|T\| = 1$ pour $\|\cdot\|_1$ (utiliser des pics concentrés près de 0).
c) Calculer $\|T^2\|_\infty$ (on a $T^2 f(x) = \int_0^x (x-t) f(t)\,\mathrm{d}t$).

Exercice 7 – Formes linéaires sur $\mathbb{R}^n$

Soit $a \in \mathbb{R}^n$ et $\varphi(x) = \sum a_i x_i$.

a) Calculer $\|\varphi\|$ lorsque $\mathbb{R}^n$ est muni de $\|\cdot\|_\infty$.
b) Même question pour $\|\cdot\|_1$ et pour $\|\cdot\|_2$.
c) Application : $a = (1, -2, 2)$.

Exercice 8 – Évaluation d'un polynôme hors de l'intervalle

Sur $\mathbb{R}_n[X]$ muni de $N(P) = \sum_{k=0}^{n} |a_k|$, soit $\varphi(P) = P(2)$.

a) Montrer que $|\varphi(P)| \leq 2^n N(P)$.
b) Montrer que $\|\varphi\| = 2^n$.
c) Que devient φ sur $\mathbb{R}[X]$ muni de N ?

Exercice 9 – Opérateurs de décalage

Sur l'espace ℓ^∞ des suites bornées muni de $\|u\|_\infty = \sup |u_n|$, on pose $S(u) = (u_{n+1})_n$ et $R(u) = (0, u_0, u_1, \ldots)$.

a) Montrer que S et R sont continues de norme 1.
b) Montrer que R est une isométrie non surjective et que S est surjective non injective.
c) Calculer $S \circ R$ et $R \circ S$. Commenter par rapport à la dimension finie.

Exercice 10 – Série de Neumann

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ et une norme subordonnée avec $\|A\| < 1$.

a) Montrer que $\sum A^k$ converge et que $(I - A)\sum_{k=0}^{N} A^k = I - A^{N+1}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

b) En déduire que $I-A$ est inversible et $\|(I-A)^{-1}\| \leq \frac{1}{1-\|A\|}$.

c) Application : $A = \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}3 \\ 0{,}1 & 0{,}4 \end{pmatrix}$; calculer $\|A\|_\infty$, puis $(I-A)^{-1}$ et vérifier la majoration.

Exercice 11 – Rayon spectral et normes

a) Montrer que $\rho(A) \leq \|A\|$ pour toute norme subordonnée sur $M_n(\mathbb{C})$.

b) Pour $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, comparer $\rho(N)$ et $\|N\|_\infty$, $\|N\|_1$, $\|N\|_2$.

c) Montrer que ρ n'est pas une norme et n'est pas sous-additive : comparer $\rho(N+N^{\mathsf{T}})$ et $\rho(N)+\rho(N^{\mathsf{T}})$.

Exercice 12 – Produit matriciel bilinéaire continu

Sur $M_n(\mathbb{R})$ muni d'une norme subordonnée, soit $B(X,Y) = XY$.

a) Montrer que $\|B(X,Y)\| \leq \|X\|\|Y\|$ et en déduire que B est continue.

b) En déduire la continuité de $X \mapsto X^k$, puis de $X \mapsto P(X)$ pour tout polynôme P.

c) Montrer que $X \mapsto X^{-1}$ est continue sur $GL_n(\mathbb{R})$ (formule de la comatrice).

Exercice 13 – Caractérisations de la continuité d'une application linéaire

Soit $u : E \to F$ linéaire entre evn.

a) Montrer que si u est continue en 0, il existe C avec $\|u(x)\| \leq C\|x\|$ (utiliser δ associé à $\varepsilon = 1$).

b) En déduire que u est lipschitzienne, donc continue partout.

c) Montrer que u est continue si et seulement si l'image de la boule unité est bornée.

Exercice 14 – Norme d'un opérateur à noyau

Soit $K(x,t) = x + t$ et $T : f \mapsto \left(x \mapsto \int_0^1 K(x,t) f(t)\,\mathrm{d}t \right)$ sur $(C([0,1]), \|\cdot\|_\infty)$.

a) Montrer que $\|Tf\|_\infty \leq \left(\sup_x \int_0^1 |K(x,t)|\,\mathrm{d}t \right) \|f\|_\infty$.

b) Calculer cette constante et montrer que c'est $\|T\|$.

c) Montrer que T est de rang 2 et déterminer son image.

Exercice 15 – Synthèse : un opérateur injectif non surjectif

Sur $E = C([0,1])$ muni de $\|\cdot\|_\infty$, soit $T(f)(x) = x f(x) + \int_0^1 f$.

a) Montrer que T est linéaire continue et calculer $\|T\|$.

b) Montrer que T est injective.

c) Montrer que $g(x) = \sqrt{x}$ n'est pas dans l'image de T.

d) Commenter : en dimension finie, injectif équivaut à surjectif.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).