# Plaquette 5 – Espaces vectoriels normés : distances, approximation et problèmes de synthèse

## Espaces vectoriels normés — Prépa MP / MPI (2e année)

Exercices

**Méthode**

Beaucoup de problèmes d'evn se ramènent à une **distance** : distance d'un point à un hyperplan, à un sous-espace de dimension finie, aux constantes. En norme euclidienne, la meilleure approximation est **unique** (projection orthogonale) ; pour d'autres normes ($\|\cdot\|_\infty$, $\|\cdot\|_1$), elle existe en dimension finie mais peut ne pas être unique, et se calcule à la main en étudiant le maximum à minimiser. On rencontre aussi des **semi-normes** (qui ne séparent pas), des normes sur des produits, et des comparaisons fines entre normes matricielles.

### Exercice 1 – Distance d'une fonction aux constantes

Sur $C([0,1])$ muni de $\|\cdot\|_\infty$, soit $f$ continue, $m = \min f$, $M = \max f$.

a) Montrer que $\|f - c\|_\infty = \max(M - c, c - m)$.

b) En déduire que $d(f, \mathbb{R}) = \dfrac{M-m}{2}$, atteint pour une unique constante.

c) Application : $f(x) = x^2$ et $f(x) = \sin(2\pi x)$.

### Exercice 2 – Distance à un hyperplan pour la norme infinie

Dans $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\infty)$, soit $\varphi(x,y) = x + 2y$, $H = \ker\varphi$ et $a = (1,1)$.

a) Calculer $\|\varphi\|$ (norme duale).

b) Montrer que $d(a,H) = \dfrac{|\varphi(a)|}{\|\varphi\|}$ et calculer cette distance.

c) Trouver un point de $H$ qui la réalise.

### Exercice 3 – Une semi-norme

Sur $C([0,1])$, soit $p(f) = |f(0)| + |f(1)|$.

a) Montrer que $p$ vérifie homogénéité et inégalité triangulaire mais n'est pas une norme.

b) Montrer que $N = p + \|\cdot\|_1$ est une norme.

c) $N$ est-elle équivalente à $\|\cdot\|_\infty$ ?

### Exercice 4 – Norme uniforme sur deux intervalles

Sur $\mathbb{R}[X]$, soit $N_1(P) = \sup_{[0,1]}|P|$ et $N_2(P) = \sup_{[0,2]}|P|$.

a) Montrer que ce sont des normes et que $N_1 \leq N_2$.

b) Montrer qu'elles ne sont pas équivalentes.

c) Sont-elles équivalentes sur $\mathbb{R}_n[X]$ ? Donner une constante pour $n = 1$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

## Exercice 5 – Meilleure approximation non unique

Dans $\mathbb{R}^2$, soit $D = \mathbb{R}(1,0)$ et $a = (0,1)$.

a) Calculer $d(a,D)$ pour $\|\cdot\|_2$ et le point le plus proche.

b) Calculer $d(a,D)$ pour $\|\cdot\|_\infty$ et déterminer tous les points de $D$ qui la réalisent.

c) Même question pour $\|\cdot\|_1$ avec $a = (0,1)$ et $D' = \mathbb{R}(1,1)$.

## Exercice 6 – Deux normes équivalentes sur les fonctions de classe $C^1$

Sur $C^1([0,1])$, soit $N_1(f) = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$ et $N_2(f) = |f(0)| + \|f'\|_\infty$.

a) Montrer que $N_2 \le N_1$.

b) Montrer que $\|f\|_\infty \le N_2(f)$ et en déduire $N_1 \le 2N_2$.

c) Les constantes sont-elles optimales ?

## Exercice 7 – Comparaison des normes matricielles

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$.

a) Montrer que $\|A\|_2^2 = \rho(A^\mathsf{T}A) \le \|A^\mathsf{T}A\|_\infty \le \|A\|_1 \|A\|_\infty$.

b) Vérifier sur $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

c) Montrer que la norme de Frobenius n'est subordonnée à aucune norme sur $\mathbb{R}^n$ ($n \ge 2$).

## Exercice 8 – Matrices stochastiques

Soit $P$ l'ensemble des matrices stochastiques de $M_n(\mathbb{R})$ (coefficients $\ge 0$, somme de chaque ligne égale à 1).

a) Montrer que $P$ est fermé, borné et convexe.

b) Montrer que $\|P\|_\infty = 1$ pour $P \in P$, et que $P$ est stable par produit.

c) En déduire que les valeurs propres complexes de $P$ sont de module $\le 1$, et que 1 en est une.

## Exercice 9 – Norme sur un produit et continuité des opérations

Soit $E$ un evn. On munit $E \times E$ de $N(x,y) = \max(\|x\|, \|y\|)$.

a) Montrer que $N$ est une norme.

b) Montrer que $(x,y) \mapsto x + y$ est 2-lipschitzienne de $(E \times E, N)$ dans $E$.

c) Montrer que $(\lambda, x) \mapsto \lambda x$ est continue de $\mathbb{R} \times E$ dans $E$, sans être lipschitzienne.

## Exercice 10 – Normes et suites : la norme est continue

a) Montrer que $|\|x\| - \|y\|| \le \|x - y\|$.

b) En déduire que si $x_n \to x$, alors $\|x_n\| \to \|x\|$. La réciproque est-elle vraie ?

c) Dans $C([0,1])$, la suite $f_n(x) = x^n$ converge-t-elle pour $\|\cdot\|_\infty$ ? pour $\|\cdot\|_1$ ?

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

## Exercice 11 – Jauge d'un convexe

Soit $C = \{(x,y) \mid x^2 + 4y^2 \leq 1\}$ et $N(v) = \inf\{t > 0 \mid v \in tC\}$.

a) Montrer que $N(x,y) = \sqrt{x^2 + 4y^2}$.

b) En déduire que $N$ est une norme de boule unité $C$.

c) Comparer $N$ à $\|\cdot\|_2$.

## Exercice 12 – Continuité d'une norme par rapport à une autre

Soit $N_1$, $N_2$ deux normes sur $E$.

a) Montrer que $N_2$ est continue sur $(E, N_1)$ si et seulement s'il existe $C$ avec $N_2 \leq CN_1$.

b) En déduire que $\|\cdot\|_\infty$ n'est pas continue sur $(C([0,1]), \|\cdot\|_1)$.

c) Montrer que $\|\cdot\|_1$ est continue sur $(C([0,1]), \|\cdot\|_\infty)$.

## Exercice 13 – Polynômes à racines dans un intervalle

Soit $U_n$ l'ensemble des polynômes unitaires de degré $n$ dont toutes les racines sont réelles et dans $[-1,1]$, vu dans $\mathbb{R}_n[X]$ (dimension finie, norme quelconque).

a) Montrer que $U_n$ est borné (relations coefficients-racines).

b) Montrer que $U_n$ est fermé (si $P_k \to P$, les racines de $P$ sont limites de racines de $P_k$ ; on admet ce résultat de continuité).

c) En déduire que $U_n$ est compact et que $P \mapsto \sup_{[-1,1]} |P|$ atteint son minimum sur $U_n$ ; pour $n = 2$, le déterminer.

## Exercice 14 – Distance entre une matrice et les matrices scalaires

Sur $M_n(\mathbb{R})$ muni de $\|\cdot\|_F$, soit $L = \mathbb{R}I_n$.

a) Montrer que la projection orthogonale de $A$ sur $L$ est $\frac{\mathrm{tr}A}{n} I_n$.

b) En déduire $d(A,L)^2 = \|A\|_F^2 - \frac{(\mathrm{tr}A)^2}{n}$.

c) Application : $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

## Exercice 15 – Synthèse : distance d'un point à une droite selon la norme

Dans $\mathbb{R}^2$, soit $D = \{y = 2x\}$ et $a = (1,0)$.

a) Calculer $d_2(a,D)$ et le point le plus proche (norme euclidienne).

b) Calculer $d_\infty(a,D)$ et les points qui la réalisent.

c) Calculer $d_1(a,D)$.

d) Retrouver ces trois valeurs par la formule $d(a,H) = \frac{|\varphi(a)|}{\|\varphi\|}$ avec $\varphi(x,y) = 2x - y$ et la norme duale adaptée.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).