Plaquette 1 – Normes, équivalence, ouverts et applications lipschitziennes

Espaces vectoriels normés — Prépa MP / MPI (2e année)

Exercices

Méthode

On vérifie les axiomes d'une **norme**, on compare deux normes par une double inégalité, on manipule **ouverts**, **fermés** et **adhérence**, et on démontre la continuité par le caractère **lipschitzien**.

Exercice 1 – Vérifier une norme

Sur $\mathbb{R}^2$, l'application $N(x,y) = |x| + 2|y|$ est-elle une norme ? Et $N'(x,y) = |x| - |y|$?

Exercice 2 – Comparaison de normes en dimension finie

Sur $\mathbb{R}^n$, démontrer $\|x\|_\infty \leq \|x\|_1 \leq n\|x\|_\infty$.

Exercice 3 – Normes non équivalentes

Sur $E = C([0\,;1],\mathbb{R})$, montrer que $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_\infty$ ne sont pas équivalentes.

Exercice 4 – Ouvert et fermé

Dans $\mathbb{R}^2$, les ensembles suivants sont-ils ouverts, fermés, ni l'un ni l'autre ?

a) $A = \left\langle (x,y) \mid x^2 + y^2 < 1 \right\rangle$

b) $B = \{(x,y) \mid x \geq 0\}$

c) $C = \{(x,y) \mid x > 0,\ y \geq 0\}$

Exercice 5 – Adhérence et intérieur

Déterminer l'adhérence et l'intérieur de $A = \mathbb{Q} \cap [0\,;1]$ dans $\mathbb{R}$.

Exercice 6 – Caractérisation séquentielle

Montrer que $F = \left\langle (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 1 \right\rangle$ est fermé mais non borné.

Exercice 7 – Application lipschitzienne

Montrer que $N : E \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \|x\|$, est 1-lipschitzienne.

Exercice 8 – Continuité d'une application linéaire

Sur $E = C([0\,;1],\mathbb{R})$ muni de $\|\cdot\|_\infty$, montrer que $\varphi(f) = \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$ est continue et calculer sa norme d'opérateur.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 9 – Norme d'opérateur matricielle

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$. Calculer $|||A|||_\infty$, norme subordonnée à $\|\cdot\|_\infty$.

Exercice 10 – Densité

Montrer que $GL_n(\mathbb{R})$ est **dense** dans $M_n(\mathbb{R})$.

Exercice 11 – Suite dans un evn

Dans $C([0\,;1],\mathbb{R})$ muni de $\|\cdot\|_\infty$, la suite $f_n(x) = \frac{x^n}{n}$ converge-t-elle ? Vers quoi ?

Exercice 12 – Une norme sur les polynômes par évaluation

Sur $E = \mathbb{R}_n[X]$, on pose $N(P) = \sum_{k=0}^{n} |P(k)|$.

a) Montrer que N est une norme.
b) N est-elle une norme sur $\mathbb{R}_{n+1}[X]$?
c) Comparer N avec $\|P\|_\infty = \sup_{[0,n]} |P|$: établir $N \leq (n+1)\|\cdot\|_\infty$ et justifier l'existence d'une constante C telle que $\|\cdot\|_\infty \leq CN$.

Exercice 13 – Boules unités des normes usuelles du plan

Sur $\mathbb{R}^2$, on considère $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$, $\|\cdot\|_\infty$.

a) Dessiner (décrire) les trois boules unités fermées.
b) Montrer que $\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq 2\|x\|_\infty$.
c) En déduire les inclusions entre les boules, et les constantes optimales.

Exercice 14 – Distance à une partie

Soit A une partie non vide d'un evn E et $d(x,A) = \inf_{a\in A} \|x-a\|$.

a) Montrer que $|d(x,A) - d(y,A)| \leq \|x-y\|$.
b) Montrer que $d(x,A) = 0$ si et seulement si $x \in \overline{A}$.
c) Application : dans $\mathbb{R}$, calculer $d(\sqrt{2},\mathbb{Q})$ et $d(2,]0,1[)$.

Exercice 15 – Synthèse : boules et convexité

a) Montrer que toute boule $B(a,r)$ d'un espace normé est **convexe**.
b) En déduire que l'application $N(x,y) = \max(|x|,\,|x+y|)$, si c'est une norme, a une boule unité convexe — et vérifier que N est bien une norme sur $\mathbb{R}^2$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).