Plaquette 2 – Normes usuelles : vérifications, comparaisons, non-équivalence

Espaces vectoriels normés — Prépa MP / MPI (2e année)

Exercices

Méthode

Pour montrer qu'une application est une **norme**, on vérifie séparation, homogénéité et inégalité triangulaire ; la séparation demande souvent un argument (racines d'un polynôme, continuité, poids strictement positif). Pour **comparer** deux normes N_1, N_2, on cherche des constantes avec $N_1 \le \alpha N_2$ et $N_2 \le \beta N_1$, puis des vecteurs qui réalisent les égalités (constantes optimales). En dimension infinie, pour montrer que deux normes **ne sont pas équivalentes**, on exhibe une suite (f_n) telle que $\dfrac{N_1(f_n)}{N_2(f_n)} \to +\infty$ ou 0 ; les fonctions x^n, les « pics » triangulaires et les $\sin(nx)$ sont les exemples typiques.

Exercice 1 – Une norme définie par une valeur absolue

Sur $\mathbb{R}^2$, soit $N(x,y) = |x+y| + |x-y|$.

a) Montrer que $N(x,y) = 2\max(|x|,|y|)$.

b) En déduire que N est une norme et décrire sa boule unité.

c) Comparer N avec $\|\cdot\|_1$.

Exercice 2 – Norme issue d'une forme quadratique

Sur $\mathbb{R}^2$, soit $N(x,y) = \sqrt{x^2 + xy + y^2}$.

a) Écrire $N^2 = X^{\mathsf{T}} S X$ et montrer que S est définie positive.

b) En déduire que N est une norme (euclidienne).

c) Déterminer les meilleures constantes α, β telles que $\alpha\|\cdot\|_2 \le N \le \beta\|\cdot\|_2$.

Exercice 3 – Une norme sur les fonctions de classe C¹

Sur $E = C^1([0,1],\mathbb{R})$, soit $N(f) = |f(0)| + \|f'\|_\infty$.

a) Montrer que N est une norme.

b) Montrer que $\|f\|_\infty \le N(f)$.

c) Montrer que N et $\|\cdot\|_\infty$ ne sont pas équivalentes sur E.

Exercice 4 – Normes 1, 2 et infinie sur les fonctions continues

Sur $C([0,1])$, on considère $\|f\|_1 = \int_0^1 |f|$, $\|f\|_2 = \left(\int_0^1 f^2\right)^{1/2}$, $\|f\|_\infty$.

a) Montrer que $\|f\|_1 \le \|f\|_2 \le \|f\|_\infty$.

b) Calculer les trois normes de $f_n(x) = x^n$.

c) En déduire que les trois normes sont deux à deux non équivalentes.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 5 – Les normes p sur $\mathbb{R}^n$

Pour $p \geq 1$ et $x \in \mathbb{R}^n$, on pose $\|x\|_p = \left(\sum |x_i|^p\right)^{1/p}$ (on admet que c'est une norme).

a) Montrer que $\|x\|_\infty \leq \|x\|_p \leq n^{1/p}\|x\|_\infty$.

b) En déduire que $\|x\|_p \to \|x\|_\infty$ quand $p \to +\infty$.

c) Calculer $\|(3,4)\|_p$ pour $p = 1, 2$, et la limite.

Exercice 6 – Normes sur les matrices

Sur $M_n(\mathbb{R})$, soit $N(A) = \max_{i,j} |a_{ij}|$ et $\|A\| = \max_i \sum_j |a_{ij}|$.

a) Montrer que $N(A) \leq \|A\| \leq nN(A)$ et que ces constantes sont optimales.

b) Montrer que $\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$, mais que N ne vérifie pas $N(AB) \leq N(A)N(B)$.

c) Les applications $A \mapsto |\mathrm{tr}A|$ et $A \mapsto \rho(A)$ sont-elles des normes ?

Exercice 7 – Coefficients et norme uniforme d'un polynôme

Sur $\mathbb{R}_n[X]$, soit $N(P) = \sum |a_k|$ (somme des valeurs absolues des coefficients) et $\|P\| = \sup_{[-1,1]} |P|$.

a) Montrer que $\|P\| \leq N(P)$.

b) Justifier l'existence de C_n avec $N \leq C_n \|\cdot\|$.

c) Avec le polynôme de Tchebychev $T_3 = 4X^3 - 3X$ ($\|T_3\| = 1$), montrer que $C_3 \geq 7$. Que suggère T_n pour C_n quand n grandit ?

Exercice 8 – Norme uniforme pondérée

Sur $C([0,1])$, soit $N(f) = \sup_{x \in [0,1]} |f(x)| \mathrm{e}^{-x}$.

a) Montrer que N est une norme.

b) Montrer que $\mathrm{e}^{-1}\|f\|_\infty \leq N(f) \leq \|f\|_\infty$.

c) Calculer $N(f)$ pour $f(x) = \mathrm{e}^{2x}$ et vérifier l'encadrement.

Exercice 9 – Un poids qui s'annule

Sur $C([0,1])$, soit $N(f) = \int_0^1 x|f(x)|\,\mathrm{d}x$.

a) Montrer que N est une norme (le poids s'annule en 0 : justifier la séparation).

b) Montrer que $N \leq \|\cdot\|_1$.

c) Avec $f_n(x) = \max(0, 1 - nx)$, montrer que N et $\|\cdot\|_1$ ne sont pas équivalentes.

Exercice 10 – Suites à support fini

Soit E l'espace des suites réelles nulles à partir d'un certain rang, muni de $\|u\|_1 = \sum |u_k|$ et $\|u\|_\infty = \max |u_k|$.

a) Montrer que $\|u\|_\infty \leq \|u\|_1$.

b) Montrer que ces normes ne sont pas équivalentes.

c) La suite $u^{(n)} = \left(1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{n}, 0, 0, \ldots\right)$ est-elle bornée pour $\|\cdot\|_\infty$? pour $\|\cdot\|_1$?

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 11 – Cas d'égalité dans l'inégalité triangulaire

a) Pour une norme euclidienne, montrer que $\|x+y\| = \|x\| + \|y\|$ avec $y \neq 0$ si et seulement si $x = \lambda y$ avec $\lambda \geq 0$.

b) Montrer que ce n'est plus vrai pour $\|\cdot\|_1$ sur $\mathbb{R}^2$ (exemple).

c) En déduire que la sphère unité de $\|\cdot\|_1$ contient des segments, contrairement à celle de $\|\cdot\|_2$.

Exercice 12 – Une norme à boule hexagonale

Sur $\mathbb{R}^2$, soit $N(x,y) = \max(|x|, |y|, |x+y|)$.

a) Montrer que N est une norme.

b) Décrire sa boule unité fermée et en donner les sommets.

c) Comparer N avec $\|\cdot\|_\infty$.

Exercice 13 – Des applications qui ne sont pas des normes

Les applications suivantes sont-elles des normes sur $\mathbb{R}^2$?

a) $N_1(x,y) = \sqrt{|xy|}$.

b) $N_2(x,y) = \left(\sqrt{|x|} + \sqrt{|y|}\right)^2$.

c) $N_3(x,y) = |x| + 2|y|$.

Exercice 14 – Norme image par une application linéaire

Soit N une norme sur F et $u : E \to F$ linéaire.

a) Montrer que $N \circ u$ est une norme sur E si et seulement si u est injective.

b) Application : montrer que $P \mapsto |P(0)| + |P'(0)| + |P''(0)|$ est une norme sur $\mathbb{R}_2[X]$.

c) Est-ce une norme sur $\mathbb{R}_3[X]$?

Exercice 15 – Synthèse : trois normes sur les polynômes de degré au plus 2

Sur $E = \mathbb{R}_2[X]$, on considère $\|P\| = \sup_{[0,1]} |P|$ et $M(P) = \max\left(|P(0)|, P\left(\frac{1}{2}\right), |P(1)|\right)$.

a) Montrer que M est une norme et que $M \leq \|\cdot\|$.

b) Écrire $P = P(0)L_0 + P\left(\frac{1}{2}\right)L_1 + P(1)L_2$ avec les polynômes de Lagrange, et en déduire $\|P\| \leq \Lambda M(P)$ avec $\Lambda = \sup_{[0,1]}(|L_0| + |L_1| + |L_2|)$.

c) Sachant que $\Lambda = \frac{5}{4}$ (atteint en $x = \frac{1}{4}$), trouver P réalisant $\|P\| = \frac{5}{4}M(P)$.

d) Conclure sur les constantes optimales.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).