Plaquette 3 – Topologie d'un evn : ouverts, fermés, adhérence, densité

Espaces vectoriels normés — Prépa MP / MPI (2e année)

Exercices

Méthode

Les deux outils les plus efficaces sont l'**image réciproque par une application continue** (si f est continue, $\{f < a\}$ est ouvert, $\{f \leq a\}$ et $\{f = a\}$ sont fermés) et la **caractérisation séquentielle** (F est fermé si et seulement si la limite de toute suite convergente d'éléments de F est dans F). Pour montrer qu'une partie n'est **pas** fermée, on exhibe une suite d'éléments qui converge hors de la partie ; pour montrer qu'elle n'est pas ouverte, un point dont tout voisinage déborde. La **densité** s'établit en approchant chaque point par une suite de la partie (perturbation, troncature, interpolation).

Exercice 1 – Ouvert ou fermé ? Parties du plan

Dire si les parties suivantes de $\mathbb{R}^2$ sont ouvertes, fermées, ni l'un ni l'autre.

a) $A = \{(x,y) \mid xy > 1\}$ et $B = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \leq 1,\ y \geq 0\}$.

b) $C = \{(x,y) \mid 0 < x \leq 1\}$.

c) $D = \left\langle \left(x, \sin\frac{1}{x}\right) \mid x > 0 \right\rangle$ (graphe) : est-il fermé ?

Exercice 2 – Le groupe linéaire est un ouvert dense

a) Montrer que $GL_n(\mathbb{R})$ est un ouvert de $M_n(\mathbb{R})$.

b) Montrer qu'il est dense (considérer $A - \frac{1}{k}I$).

c) Montrer que l'ensemble $\{A \mid \det A = 1\}$ est fermé mais pas ouvert.

Exercice 3 – Fermés de matrices

Montrer que les parties suivantes de $M_n(\mathbb{R})$ sont fermées.

a) L'ensemble N des matrices nilpotentes.

b) L'ensemble des matrices de rang $\leq r$ (utiliser les mineurs).

c) L'ensemble des matrices de rang exactement r ($1 \leq r < n$) est-il fermé ? ouvert ?

Exercice 4 – Intérieur des diagonalisables de $M_2(\mathbb{R})$

Soit D l'ensemble des matrices de $M_2(\mathbb{R})$ diagonalisables sur $\mathbb{R}$, et $\Delta(A) = (\mathrm{tr}A)^2 - 4\det A$.

a) Montrer que $\{\Delta > 0\} \subset D \subset \{\Delta > 0\} \cup \{\text{matrices scalaires}\}$.

b) En déduire que l'intérieur de D est $\{\Delta > 0\}$.

c) Montrer que l'adhérence de D est $\{\Delta \geq 0\}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 5 – Adhérence, intérieur, frontière dans R

Déterminer l'adhérence, l'intérieur et la frontière de :

a) $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

b) $A = \left\{ \frac{1}{n} \mid n \geq 1 \right\}$.

c) $B = [0, 1[\cup \{2\}$.

Exercice 6 – Un hyperplan dense

Sur $E = \mathbb{R}[X]$ muni de $\|P\| = \sup_{[0,1]} |P|$, soit $\varphi(P) = P(2)$.

a) Montrer que φ n'est pas continue (considérer $P_n = \left(\frac{X}{2}\right)^n$).

b) Montrer que $H = \ker \varphi$ est dense dans E : approcher P par $P - \frac{P(2)}{Q_n(2)} Q_n$ avec $Q_n = X^n$.

c) Comparer avec la dimension finie.

Exercice 7 – Boule ouverte et boule fermée

Soit E un evn, $a \in E$ et $r > 0$.

a) Montrer que $\overline{B(a,r)} = B_f(a,r)$ (pour x avec $\|x - a\| = r$, considérer $a + t(x-a)$, $t \to 1^-$).

b) Montrer que l'intérieur de $B_f(a,r)$ est $B(a,r)$.

c) Montrer que le résultat a) peut être faux dans un espace métrique qui n'est pas un evn (distance discrète).

Exercice 8 – Adhérence d'un sous-espace

Soit F un sous-espace vectoriel d'un evn E.

a) Montrer que $\overline{F}$ est un sous-espace vectoriel.

b) Montrer que si $F \neq E$, alors $\mathring{F} = \varnothing$.

c) Montrer que $\mathbb{R}[X]$ n'est pas fermé dans $C([0,1])$ muni de $\|\cdot\|_\infty$ (on admet le théorème de Weierstrass), et que son intérieur est vide.

Exercice 9 – Somme de deux fermés

a) Montrer que si U est ouvert, alors $U + A = \{u + a\}$ est ouvert pour toute partie A.

b) Montrer que $\mathbb{Z} + \sqrt{2}\mathbb{Z}$ est un sous-groupe de $\mathbb{R}$ qui n'est pas de la forme $a\mathbb{Z}$, et en déduire qu'il est dense.

c) En déduire que la somme de deux fermés n'est pas toujours fermée.

Exercice 10 – Ouvert défini par des inégalités strictes

Soit $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 2,\ y > x^2\}$.

a) Montrer que Ω est ouvert.

b) Montrer que $\overline{\Omega} \subset \{x^2 + y^2 \leq 2,\ y \geq x^2\}$, et que l'inclusion est une égalité.

c) Déterminer les points d'intersection des deux courbes frontières.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 11 – Matrices de rang 1 en taille 2

Soit R_1 l'ensemble des matrices de $M_2(\mathbb{R})$ de rang 1.

a) Montrer que $R_1 = \{A \neq 0 \mid \det A = 0\}$.

b) Déterminer l'adhérence et l'intérieur de R_1.

c) Montrer que $\{\det = 0\}$ est un fermé d'intérieur vide.

Exercice 12 – Adhérence d'un convexe

Soit C une partie convexe d'un evn.

a) Montrer que $\overline{C}$ est convexe.

b) Montrer que l'intérieur de C est convexe (si $B(x,r) \subset C$ et $y \in C$, montrer que $B((1-t)x+ty,(1-t)r) \subset C$).

c) Donner un exemple de partie non convexe dont l'adhérence est convexe.

Exercice 13 – La sphère unité de l'espace des fonctions continues

Dans $E = C([0,1])$ muni de $\|\cdot\|_\infty$, soit $S = \{f \mid \|f\|_\infty = 1\}$ et $P = \{f \mid f \geq 0\}$.

a) Montrer que S et P sont fermés.

b) Montrer que P est d'intérieur non vide ; décrire son intérieur.

c) Le même ensemble P est-il d'intérieur non vide pour $\|\cdot\|_1$?

Exercice 14 – Adhérence d'un ensemble de sommes d'inverses

Soit $A = \left\langle \frac{1}{n} + \frac{1}{m} \mid n,m \geq 1 \right\rangle \subset \mathbb{R}$.

a) Montrer que 0 et les $\frac{1}{n}$ sont adhérents à A.

b) Montrer que $\overline{A} = A \cup \{0\} \cup \left\langle \frac{1}{n} \mid n \geq 1 \right\rangle$.

c) A est-il fermé ?

Exercice 15 – Synthèse : un domaine du plan

Soit $K = \{(x,y) \mid y \geq x^2,\ x^2+y^2 \leq 2\}$.

a) Montrer que K est fermé et borné.

b) Montrer que K est convexe.

c) Déterminer l'intérieur et la frontière de K.

d) Déterminer le maximum de y et de x sur K.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).