Plaquette 2 – Existence et calcul d'espérances : sommabilité, transfert, queue de loi

Espérance et variance — Prépa MP / MPI (2e année)

Corrections détaillées

Boîte à outils

Existence. X discrète admet une espérance si et seulement si $\sum_x |x|\,\mathbb{P}(X=x) < +\infty$; alors

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} x\,\mathbb{P}(X=x)$$

— **Domination** : si $|X| \leq Y$ et $\mathbb{E}(Y) < +\infty$, alors X admet une espérance. Outil fréquent : $|xy| \leq \dfrac{x^2+y^2}{2}$.

— **Transfert** : $\mathbb{E}(g(X)) = \sum_x g(x)\,\mathbb{P}(X=x)$, sous réserve de sommabilité ; idem pour $g(X,Y)$ avec la loi du couple.

Formules de la queue (X à valeurs dans $\mathbb{N}$) :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{n \geq 0} \mathbb{P}(X > n) \qquad \mathbb{E}\left(X^2\right) = \sum_{n \geq 0} (2n+1)\,\mathbb{P}(X > n)$$

Indicatrices. $X = \sum_i 1_{A_i}$ donne $\mathbb{E}(X) = \sum_i \mathbb{P}(A_i)$, **sans** hypothèse d'indépendance.

Lois usuelles. $G(p)$: $\mathbb{P}(X > n) = q^n$, $\mathbb{E}(X) = \frac{1}{p}$; $P(\lambda)$: $\mathbb{E}(X) = \lambda$; $B(n,p)$: $\mathbb{E}(X) = np$.

Correction de l'exercice 1 – Moments factoriels de la loi de Poisson

a) Les termes sont positifs et la série ci-dessous converge, ce qui justifie l'existence. Les termes $k < r$ sont nuls :

$$\mathbb{E}[X(X-1)\cdots(X-r+1)] = \sum_{k \geq r} \frac{k!}{(k-r)!}\,\mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} = \lambda^r \mathrm{e}^{-\lambda} \sum_{j \geq 0} \frac{\lambda^j}{j!} = \lambda^r$$

b) On écrit x^3 dans la base des polynômes factoriels :

$$x^3 = x(x-1)(x-2) + 3x(x-1) + x$$

— Contrôle en $x = 2$: $0 + 6 + 2 = 8$ ✓.

— Par linéarité : $\mathbb{E}\left(X^3\right) = \lambda^3 + 3\lambda^2 + \lambda$.

— Pour $\lambda = 2$: $8 + 12 + 2 = 22$.

Réponse. λ^r ; $\mathbb{E}\left(X^3\right) = \lambda^3 + 3\lambda^2 + \lambda = 22$ pour $\lambda = 2$.

Correction de l'exercice 2 – Transfert : la fonction puissance d'une loi géométrique

a) **Sommabilité** : il faut que $\sum_{k \geq 1} |a|^k q^{k-1} p$ converge, c'est-à-dire $|a|q < 1$, soit $|a| < \frac{1}{q}$. Alors, par transfert et série géométrique :

$$\mathbb{E}\left(a^X\right) = \sum_{k \geq 1} a^k q^{k-1} p = ap \sum_{j \geq 0} (aq)^j = \frac{ap}{1-aq}$$

— Contrôle $a = 1$: on retrouve $\frac{p}{1-q} = 1$ ✓.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

— Si $|a| \geq \frac{1}{q}$, la série diverge : pas d'espérance.

b) Pour la loi de Poisson, $\sum_k |a|^k \mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} = \mathrm{e}^{\lambda(|a|-1)}$ converge pour **tout** réel a :

$$\mathbb{E}\left(a^X\right) = \mathrm{e}^{\lambda(a-1)}$$

— **Interprétation** : la queue de Poisson décroît plus vite que toute exponentielle, celle de la géométrique seulement comme q^k.

Réponse. Géométrique : $\frac{ap}{1-aq}$ pour $|a| < \frac{1}{q}$; Poisson : $\mathrm{e}^{\lambda(a-1)}$ pour tout a.

Correction de l'exercice 3 – Espérance de l'inverse d'une variable géométrique

— **Existence** : $0 < \frac{1}{X} \leq 1$, donc $\frac{1}{X}$ est bornée et admet une espérance.

— **Transfert** :

$$\mathbb{E}\left(\frac{1}{X}\right) = \sum_{k\geq 1} \frac{1}{k} q^{k-1} p = \frac{p}{q}\sum_{k\geq 1}\frac{q^k}{k}$$

— On reconnaît le développement $-\ln(1-x) = \sum_{k\geq 1}\frac{x^k}{k}$ pour $|x| < 1$:

$$\mathbb{E}\left(\frac{1}{X}\right) = -\frac{p\ln p}{q} = \frac{p\ln(1/p)}{1-p}$$

— **Application** $p = \frac{1}{2}$: $\mathbb{E}\left(\frac{1}{X}\right) = \ln 2 \approx 0{,}693$, alors que $\frac{1}{\mathbb{E}(X)} = \frac{1}{2}$.

— **Piège** : on n'a **jamais** $\mathbb{E}\left(\frac{1}{X}\right) = \frac{1}{\mathbb{E}(X)}$ en général ; ici l'inégalité $\mathbb{E}\left(\frac{1}{X}\right) \geq \frac{1}{\mathbb{E}(X)}$ découle de Cauchy-Schwarz : $1 = \mathbb{E}\left(\sqrt{X}\frac{1}{\sqrt{X}}\right)^2 \leq \mathbb{E}(X)\,\mathbb{E}\left(\frac{1}{X}\right)$.

Réponse. $\mathbb{E}\left(\frac{1}{X}\right) = -\frac{p\ln p}{1-p}$; $\ln 2 \approx 0{,}693 > 0{,}5$ pour $p = \frac{1}{2}$.

Correction de l'exercice 4 – Une queue en 1/n

a) $\mathbb{P}(X = n) = \mathbb{P}(X \geq n) - \mathbb{P}(X \geq n+1)$, donc

$$\mathbb{P}(X = n) = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)}$$

— Contrôle : la somme télescopique vaut 1 ✓.

b) **Formule de la queue** : $\mathbb{E}(X) = \sum_{n\geq 1}\mathbb{P}(X \geq n) = \sum_{n\geq 1}\frac{1}{n} = +\infty$ (série harmonique). Pas d'espérance.

c) **Transfert** : $\sqrt{n}\,\mathbb{P}(X = n) = \frac{\sqrt{n}}{n(n+1)} \sim \frac{1}{n^{3/2}}$, terme général d'une série de Riemann convergente ($\frac{3}{2} > 1$). Donc $\sqrt{X}$ admet une espérance.

— **Leçon** : une variable sans espérance peut avoir des « moments fractionnaires » : ici X^α admet une espérance si et seulement si $\alpha < 1$.

Réponse. $\mathbb{P}(X = n) = \frac{1}{n(n+1)}$; $\mathbb{E}(X) = +\infty$; $\mathbb{E}\left(\sqrt{X}\right) < +\infty$.

Correction de l'exercice 5 – Maximum et minimum de deux géométriques

a) **Indépendance** : $\mathbb{P}(U > n) = \mathbb{P}(X > n)\,\mathbb{P}(Y > n) = q^{2n} = \left(q^2\right)^n$. Donc $U \sim G\left(1-q^2\right)$ et $\mathbb{E}(U) = \frac{1}{1-q^2}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

b) $\mathbb{P}(V \leq n) = (1-q^n)^2$, donc $\mathbb{P}(V > n) = 2q^n - q^{2n}$. **Formule de la queue** :

$$\mathbb{E}(V) = \sum_{n \geq 0} \left(2q^n - q^{2n}\right) = \frac{2}{p} - \frac{1}{1-q^2}$$

c) **Contrôle** : $\mathbb{E}(U) + \mathbb{E}(V) = \frac{2}{p} = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y)$ ✓ (linéarité).

— Pour $p = \frac{1}{2}$: $\mathbb{E}(U) = \frac{4}{3} \approx 1{,}33$ et $\mathbb{E}(V) = 4 - \frac{4}{3} = \frac{8}{3} \approx 2{,}67$.

— **Interprétation** : deux joueurs lancent chacun une pièce jusqu'à pile ; le premier finit en moyenne en 1,33 lancers, le dernier en 2,67.

Réponse. $U \sim G(1-q^2)$; $\mathbb{E}(V) = \frac{2}{p} - \frac{1}{1-q^2}$; $\frac{4}{3}$ et $\frac{8}{3}$ pour $p = \frac{1}{2}$.

Correction de l'exercice 6 – Produit de deux variables de carré intégrable

a) **Domination** : pour tous réels, $0 \leq (|x| - |y|)^2$ donne

$$|xy| \leq \frac{x^2 + y^2}{2}$$

— Donc $|XY| \leq \frac{X^2+Y^2}{2}$, variable d'espérance finie par linéarité : XY admet une espérance (par le théorème de transfert appliqué au couple).

b) On développe : $(X+Y)^2 = X^2 + 2XY + Y^2$, somme de trois variables d'espérance finie (par a)), donc $(X+Y)^2$ admet une espérance.

c) Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, $(\lambda X)^2 = \lambda^2 X^2$ admet une espérance, la variable nulle aussi, et b) donne la stabilité par somme : c'est un sous-espace vectoriel de l'espace des variables aléatoires réelles.

— **Prolongement** : sur cet espace, $(X, Y) \mapsto \mathbb{E}(XY)$ est bilinéaire symétrique positive — c'est le cadre de Cauchy-Schwarz.

Réponse. $|XY| \leq \frac{X^2+Y^2}{2}$; L^2 discret est un espace vectoriel.

Correction de l'exercice 7 – Une série convergente qui ne suffit pas

a) Les valeurs $(-1)^k k$ sont distinctes et $\sum_{k \geq 1} \frac{6}{\pi^2 k^2} = \frac{6}{\pi^2} \cdot \frac{\pi^2}{6} = 1$ ✓.

b) Le terme général vaut $\frac{6}{\pi^2} \cdot \frac{(-1)^k}{k}$: série alternée dont le terme décroît vers 0 en valeur absolue, donc **convergente** (critère spécial), de somme

$$\frac{6}{\pi^2} \sum_{k \geq 1} \frac{(-1)^k}{k} = -\frac{6 \ln 2}{\pi^2} \approx -0{,}421$$

c) Mais $\sum_k |(-1)^k k|\, \mathbb{P} = \frac{6}{\pi^2} \sum_k \frac{1}{k} = +\infty$: la famille n'est **pas sommable**. X n'admet **pas** d'espérance.

— **Pourquoi exiger la sommabilité ?** Les valeurs de X n'ont pas d'ordre naturel ; une série semi-convergente réordonnée peut avoir n'importe quelle somme (théorème de Riemann). L'espérance ne doit pas dépendre de l'ordre d'énumération.

Réponse. La série converge (vers $-\frac{6\ln 2}{\pi^2}$) mais pas absolument : pas d'espérance.

Correction de l'exercice 8 – Minimum de deux dés par la queue

a) $m \geq k$ si et seulement si les deux dés valent au moins k ; par indépendance,

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$$\mathbb{P}(m \geq k) = \left(\frac{7-k}{6}\right)^2$$

b) **Formule de la queue** (m à valeurs dans $\{1, \dots, 6\}$) : $\mathbb{E}(m) = \sum_{k=1}^{6} \mathbb{P}(m \geq k)$, et en posant $j = 7 - k$:

$$\mathbb{E}(m) = \frac{1}{36} \sum_{j=1}^{6} j^2 = \frac{91}{36} \approx 2{,}53$$

c) $m + M = D_1 + D_2$, donc par linéarité $\mathbb{E}(M) = 7 - \frac{91}{36} = \frac{161}{36} \approx 4{,}47$.

— **Contrôle direct** : $\mathbb{P}(M = k) = \frac{2k-1}{36}$ et $\sum_k k(2k-1) = 161$ ✓.

— **Généralisation** : pour deux dés à n faces, $\mathbb{E}(m) = \frac{(n+1)(2n+1)}{6n}$.

Réponse. $\mathbb{E}(m) = \frac{91}{36} \approx 2{,}53$ et $\mathbb{E}(M) = \frac{161}{36} \approx 4{,}47$.

Correction de l’exercice 9 – Nombre moyen de descentes d’une permutation

— **Indicatrices** : $D = \sum_{i=1}^{n-1} 1_{A_i}$ avec $A_i = \{\sigma(i) > \sigma(i+1)\}$.

— **Symétrie** : la transposition des valeurs en positions i et $i+1$ est une bijection de A_i sur son complémentaire, donc $\mathbb{P}(A_i) = \frac{1}{2}$.

— **Linéarité** :

$$\mathbb{E}(D) = \sum_{i=1}^{n-1} \mathbb{P}(A_i) = \frac{n-1}{2}$$

— **Contrôle** $n = 3$: 123 (0 descente), 132, 213, 231, 312 (1 descente chacune), 321 (2 descentes). Moyenne : $\frac{0+4+2}{6} = 1 = \frac{3-1}{2}$ ✓.

— **Remarque** : les A_i ne sont pas indépendants (deux descentes consécutives sont moins probables que $\frac{1}{4}$), mais la linéarité n’en a pas besoin.

Réponse. $\mathbb{E}(D) = \frac{n-1}{2}$.

Correction de l’exercice 10 – Nombre moyen de cycles d’une permutation

a) **Dénombrement** : un cycle de longueur k contenant i se choisit en ordonnant $k-1$ autres éléments à la suite de i : $\frac{(n-1)!}{(n-k)!}$ façons ; le reste se permute en $(n-k)!$ façons. Donc

$$\mathbb{P}(L_i = k) = \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n}$$

b) Un cycle de longueur ℓ contient ℓ éléments, qui contribuent chacun $\frac{1}{\ell}$: chaque cycle compte pour 1 dans la somme.

c) **Linéarité et transfert** :

$$\mathbb{E}(C) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \cdot \frac{1}{n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = H_n$$

— **Contrôle** $n = 4$: $\frac{6 \times 1 + 11 \times 2 + 6 \times 3 + 1 \times 4}{24} = \frac{50}{24} = \frac{25}{12} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}$ ✓.

— **Ordre de grandeur** : $H_n \sim \ln n$; une permutation de 10^6 éléments a en moyenne environ 14,4 cycles.

Réponse. $\mathbb{E}(C) = H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ ($\frac{25}{12}$ pour $n = 4$).

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l'exercice 11 – Moment d'ordre 2 par la queue

a) Pour $k \in \mathbb{N}$, $k^2 = \sum_{n=0}^{k-1}(2n+1)$ (somme des k premiers impairs), donc $X^2 = \sum_{n \geq 0}(2n+1)1_{\{X > n\}}$. Les termes sont **positifs** : on peut intervertir espérance et somme (sommation par paquets dans $[0, +\infty]$), d'où

$$\mathbb{E}\left(X^2\right) = \sum_{n \geq 0}(2n+1)\,\mathbb{P}(X > n)$$

b) $\mathbb{P}(X > n) = q^n$. Avec $\sum_{n \geq 0} n q^n = \frac{q}{(1-q)^2}$ et $\sum_{n \geq 0} q^n = \frac{1}{1-q}$:

— $\mathbb{E}\left(X^2\right) = \frac{2q}{p^2} + \frac{1}{p} = \frac{2q+p}{p^2} = \frac{2-p}{p^2}$.

— $\mathrm{V}(X) = \frac{2-p}{p^2} - \frac{1}{p^2} = \frac{1-p}{p^2} = \frac{q}{p^2}$.

— **Contrôle** $p = \frac{1}{2}$: $\mathbb{E}\left(X^2\right) = 6$ et $\mathrm{V}(X) = 2$.

Réponse. $\mathbb{E}\left(X^2\right) = \frac{2-p}{p^2}$, $\mathrm{V}(X) = \frac{q}{p^2}$.

Correction de l'exercice 12 – Attendre deux piles consécutifs

a) **Formule de l'espérance totale** selon le début de la suite :

— premier lancer face (proba $\frac{1}{2}$) : tout recommence, coût $1 + e$;

— pile puis face (proba $\frac{1}{4}$) : tout recommence, coût $2 + e$;

— pile puis pile (proba $\frac{1}{4}$) : terminé en 2 lancers.

$$e = \frac{1}{2}(1+e) + \frac{1}{4}(2+e) + \frac{1}{4} \times 2$$

— Soit $e = \frac{3}{2} + \frac{3}{4}e$, donc $e = 6$.

b) Pour « pile puis face », on attend un premier pile ($G\left(\frac{1}{2}\right)$, espérance 2), puis, ce pile obtenu, le **premier face** qui suit (les piles intermédiaires ne font pas perdre le pile déjà acquis) : encore 2 en moyenne. Total 4.

— **Commentaire** : les deux motifs ont la même probabilité $\frac{1}{4}$ d'apparaître à une position donnée, mais pas le même temps d'attente : un échec sur « PP » ramène au départ, alors qu'un pile supplémentaire n'annule pas « P… F ».

Réponse. $\mathbb{E}(T_{PP}) = 6$; $\mathbb{E}(T_{PF}) = 4$.

Correction de l'exercice 13 – Espérance conditionnelle et absence de mémoire

a) Pour $k \geq 1$:

$$\mathbb{P}(X - m = k \mid X > m) = \frac{\mathbb{P}(X = m+k)}{\mathbb{P}(X > m)} = \frac{q^{m+k-1}p}{q^m} = q^{k-1}p$$

— La loi conditionnelle de $X - m$ est encore $G(p)$: c'est l'**absence de mémoire**.

b) **Espérance conditionnelle** (espérance pour la probabilité $\mathbb{P}(\cdot \mid X > m)$) : $\mathbb{E}(X \mid X > m) = m + \mathbb{E}(X - m \mid X > m) = m + \frac{1}{p}$.

c) $p = 0{,}05$, $m = 12$: $\mathbb{E}(X \mid X > 12) = 12 + 20 = 32$ mois.

— **Lecture** : il reste en moyenne 20 mois, exactement comme pour un composant neuf : le modèle géométrique ne connaît pas l'usure. Pour un matériel qui vieillit, ce modèle

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

est inadapté.

Réponse. $X - m \mid X > m \sim G(p)$; $\mathbb{E}(X \mid X > m) = m + \frac{1}{p}$; 32 mois.

Correction de l'exercice 14 – Temps d'attente du r-ième succès

a) Soit G_j le nombre d'épreuves entre le $(j-1)$-ième succès (exclu) et le j-ième (inclus). Les G_j suivent la loi $G(p)$ et $T_r = G_1 + \cdots + G_r$, donc par **linéarité**

$$\mathbb{E}(T_r) = \frac{r}{p}$$

b) **Transfert** avec $k\binom{k-1}{r-1} = r\binom{k}{r}$:

$$\mathbb{E}(T_r) = \sum_{k \geq r} r\binom{k}{r} p^r q^{k-r} = \frac{r}{p} \sum_{k \geq r} \binom{k}{r} p^{r+1} q^{k-r} = \frac{r}{p}$$

— La dernière somme vaut 1 : c'est la somme des probabilités de T_{r+1} (avec $\binom{k}{r} p^{r+1} q^{k-r} = \mathbb{P}(T_{r+1} = k+1)$).

c) $\mathbb{E}(T_6) = \frac{6}{0{,}15} = 40$ appels.

— **Comparaison** : la méthode a) n'utilise pas la loi de T_r ; c'est le réflexe à privilégier.

Réponse. $\mathbb{E}(T_r) = \frac{r}{p}$; 40 appels.

Correction de l'exercice 15 – Synthèse : le rang du premier as

a) **Symétrie** : parmi une carte donnée c et les 4 as, chacune des 5 cartes a la même probabilité d'être la première sortie, donc $\mathbb{P}(c \text{ avant les as}) = \frac{1}{5}$.

b) **Indicatrices** : $R = 1 + \sum_c 1_{\{c \text{ avant le premier as}\}}$, la somme portant sur les 48 cartes qui ne sont pas des as :

$$\mathbb{E}(R) = 1 + \frac{48}{5} = \frac{53}{5} = 10{,}6$$

c) Une carte c (non as) précède le deuxième as si, parmi c et les 4 as, elle occupe le rang 1 ou 2 : probabilité $\frac{2}{5}$. On compte aussi les deux premiers as eux-mêmes :

$$\mathbb{E}(R_2) = 2 + 48 \times \frac{2}{5} = \frac{106}{5} = 21{,}2$$

d) Même raisonnement : $\mathbb{E}(R) = 1 + \frac{N-m}{m+1} = \frac{N+1}{m+1}$.

— **Contrôle** : $N = 52$, $m = 4$ redonne $\frac{53}{5}$ ✓ ; $m = N$ donne 1 ✓.

— **Interprétation** : les 4 as découpent en moyenne le paquet en 5 tas de même taille $\frac{48}{5}$.

Réponse. $\mathbb{E}(R) = 10{,}6$; $\mathbb{E}(R_2) = 21{,}2$; en général $\frac{N+1}{m+1}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).