# Plaquette 4 – Inégalités de concentration : Markov, Tchebychev, Cantelli et Chernoff

## Espérance et variance — Prépa MP / MPI (2e année)

Corrections détaillées

**Boîte à outils**

**Markov.** Si $Y \geq 0$ et $a > 0$ : $\mathbb{P}(Y \geq a) \leq \frac{\mathbb{E}(Y)}{a}$. Conséquence : si $\varphi \geq 0$ est croissante et $\varphi(a) > 0$,

$$\mathbb{P}(X \geq a) \leq \frac{\mathbb{E}(\varphi(X))}{\varphi(a)}$$

**Bienaymé-Tchebychev.** $\mathbb{P}(|X - \mu| \geq \varepsilon) \leq \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$.

**Cantelli** (unilatérale) : pour $a > 0$, $\mathbb{P}(X - \mu \geq a) \leq \frac{\sigma^2}{\sigma^2 + a^2}$.

**Chernoff.** Pour tout $t > 0$ :

$$\mathbb{P}(X \geq a) \leq \mathrm{e}^{-ta}\,\mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{tX}\right)$$

— Pour une somme de variables indépendantes, $\mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{tS}\right) = \prod_i \mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{tX_i}\right)$ ; binomiale : $\left(q + p\mathrm{e}^{t}\right)^n$ ; Poisson : $\mathrm{e}^{\lambda(\mathrm{e}^t - 1)}$.

**Premier et second moment** ($X$ à valeurs dans $\mathbb{N}$) :

— $\mathbb{P}(X \geq 1) \leq \mathbb{E}(X)$ ;

— $\mathbb{P}(X > 0) \geq \frac{\mathbb{E}(X)^2}{\mathbb{E}\left(X^2\right)}$ (Cauchy-Schwarz).

## Correction de l’exercice 1 – Markov appliquée à une puissance

a) **Markov** : $\mathbb{P}(X \geq 5) \leq \frac{\mathbb{E}(X)}{5} = \frac{2}{5} = 0{,}4$.

b) $X \geq 0$, donc $\{X \geq 5\} = \left\langle X^2 \geq 25 \right\rangle$. Avec $\mathbb{E}\left(X^2\right) = \lambda + \lambda^2 = 6$ :

$$\mathbb{P}(X \geq 5) = \mathbb{P}\left(X^2 \geq 25\right) \leq \frac{\mathbb{E}\left(X^2\right)}{25} = \frac{6}{25} = 0{,}24$$

c) **Valeur exacte** : $\mathbb{P}(X \leq 4) = \mathrm{e}^{-2}\left(1 + 2 + 2 + \frac{4}{3} + \frac{2}{3}\right) = 7\mathrm{e}^{-2}$, donc

— $\mathbb{P}(X \geq 5) = 1 - 7\mathrm{e}^{-2} \approx 0{,}0527$.

— **Bilan** : monter en moments améliore la borne ($0{,}4 \to 0{,}24$), mais Markov reste grossière car elle ignore la forme de la loi. Avec $\mathbb{E}\left(X^3\right) = 22$, on obtiendrait $\frac{22}{125} = 0{,}176$.

**Réponse.** 0,4 ; 0,24 ; valeur exacte $1 - 7\mathrm{e}^{-2} \approx 0{,}053$.

## Correction de l’exercice 2 – Markov ne peut pas être améliorée

a) On prend $X$ à valeurs dans $\{0, a\}$ avec $\mathbb{P}(X = a) = \frac{m}{a}$ (qui est bien dans $[0, 1]$). Alors $\mathbb{E}(X) = a \times \frac{m}{a} = m$ et $\mathbb{P}(X \geq a) = \frac{m}{a}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

b) **Preuve** : pour $X \geq 0$, on a l'inégalité entre variables

$$a\,1_{\{X \geq a\}} \leq X$$

— (si $X \geq a$, on compare $a$ et $X$ ; sinon $0 \leq X$). Par croissance de l'espérance : $a\,\mathbb{P}(X \geq a) \leq \mathbb{E}(X)$.

— **Égalité** si et seulement si $X - a1_{\{X \geq a\}}$, variable positive, est d'espérance nulle, donc nulle presque sûrement : $X \in \{0, a\}$ presque sûrement.

c) $X$ vaut 4 avec probabilité $\frac{1}{4}$ et 0 sinon : $\mathbb{E}(X) = 1$ et $\mathbb{P}(X \geq 4) = \frac{1}{4}$ exactement.

— **Leçon** : sans autre information que l'espérance, on ne peut pas faire mieux ; toute amélioration exige une information supplémentaire (variance, moments exponentiels).

**Réponse.** $X \in \{0, a\}$ avec $\mathbb{P}(X = a) = \frac{m}{a}$ ; égalité seulement dans ce cas.

## Correction de l'exercice 3 – Somme de soixante dés

a) **Linéarité** : $\mathbb{E}(S) = 60 \times \frac{7}{2} = 210$. **Indépendance** : $\mathrm{V}(S) = 60 \times \frac{35}{12} = 175$.

b) **Bienaymé-Tchebychev** :

$$\mathbb{P}(|S - 210| \geq 30) \leq \frac{175}{30^2} = \frac{175}{900} \approx 0{,}194$$

c) On veut $\frac{175}{\varepsilon^2} \leq 0{,}05$, soit $\varepsilon^2 \geq 3\,500$ et $\varepsilon \geq \sqrt{3\,500} \approx 59{,}2$.

— **Conclusion** : avec probabilité au moins 0,95, $S$ est entre 151 et 269.

— **Comparaison** : l'approximation normale donnerait $\varepsilon \approx 1{,}96\sqrt{175} \approx 25{,}9$ ; Tchebychev, valable pour toute loi, est plus de deux fois trop prudent ici.

**Réponse.** $\mathbb{E}(S) = 210$, $\mathrm{V}(S) = 175$ ; borne 0,194 ; $\varepsilon \approx 59{,}2$.

## Correction de l'exercice 4 – L'inégalité de Cantelli

a) Posons $Y = X - \mu$. Si $Y \geq a$, alors $Y + u \geq a + u > 0$, donc $(Y+u)^2 \geq (a+u)^2$. **Markov** appliquée à $(Y+u)^2 \geq 0$ :

$$\mathbb{P}(Y \geq a) \leq \frac{\mathbb{E}\left[(Y+u)^2\right]}{(a+u)^2} = \frac{\sigma^2 + u^2}{(a+u)^2}$$

— (car $\mathbb{E}(Y) = 0$ et $\mathbb{E}\left(Y^2\right) = \sigma^2$).

b) La dérivée de $g(u) = \frac{\sigma^2 + u^2}{(a+u)^2}$ a le signe de $u(a+u) - (\sigma^2 + u^2) = au - \sigma^2$ : minimum en $u = \frac{\sigma^2}{a}$, où

$$g\left(\frac{\sigma^2}{a}\right) = \frac{\sigma^2 + \sigma^4/a^2}{(a + \sigma^2/a)^2} = \frac{\sigma^2}{\sigma^2 + a^2}$$

c) Pour $a = 2\sigma$ : Cantelli donne $\frac{1}{5} = 0{,}2$ pour la **seule** queue droite, alors que Tchebychev donne $\frac{1}{4}$ (bilatérale). Pour une question unilatérale, Cantelli est toujours meilleure, car $\frac{\sigma^2}{\sigma^2 + a^2} < \frac{\sigma^2}{a^2}$.

**Réponse.** $\mathbb{P}(X - \mu \geq a) \leq \frac{\sigma^2}{\sigma^2 + a^2}$ ; 0,2 contre 0,25 pour $a = 2\sigma$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

## Correction de l'exercice 5 – Chernoff pour la loi binomiale

a) $S = \sum_{i=1}^{100} B_i$ avec $B_i$ indépendantes de Bernoulli. **Markov** appliquée à $\mathrm{e}^{tS}$ (fonction croissante de $S$) :

$$\mathbb{P}(S \geq 75) \leq \mathrm{e}^{-75t}\,\mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{tS}\right) = \mathrm{e}^{-75t}\prod_{i=1}^{100}\mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{tB_i}\right) = \mathrm{e}^{-75t}\left(\frac{1+\mathrm{e}^{t}}{2}\right)^{100}$$

b) On minimise $h(t) = -75t + 100\ln\frac{1+\mathrm{e}^t}{2}$ : $h'(t) = -75 + \frac{100\,\mathrm{e}^t}{1+\mathrm{e}^t} = 0$ donne $\mathrm{e}^t = 3$. La borne vaut

$$3^{-75}\times 2^{100} = \frac{2^{100}}{3^{75}} \approx 2{,}08\times 10^{-6}$$

c) **Tchebychev** ($\mathrm{V}(S) = 25$) : $\mathbb{P}(|S-50|\geq 25) \leq \frac{25}{625} = 0{,}04$.

— Chernoff est environ 20 000 fois meilleure que Tchebychev, et seulement 7 fois au-dessus de la valeur exacte : la décroissance **exponentielle** en $n$ est capturée.

**Réponse.** $\mathrm{e}^t = 3$ ; borne $\frac{2^{100}}{3^{75}} \approx 2{,}1\times 10^{-6}$ (Tchebychev : 0,04).

## Correction de l'exercice 6 – Chernoff pour la loi de Poisson

a) **Transfert** (série exponentielle, convergente pour tout $t$) :

$$\mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{tX}\right) = \sum_{k\geq 0}\mathrm{e}^{tk}\mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} = \mathrm{e}^{\lambda(\mathrm{e}^t-1)}$$

b) **Chernoff** : $\mathbb{P}(X\geq a) \leq \exp\left(-ta + \lambda(\mathrm{e}^t-1)\right)$ pour tout $t>0$. La dérivée de l'exposant s'annule pour $\lambda\mathrm{e}^t = a$, soit $t = \ln\frac{a}{\lambda} > 0$ (car $a>\lambda$). En reportant :

— exposant $= -a\ln\frac{a}{\lambda} + a - \lambda$, d'où $\mathbb{P}(X\geq a) \leq \mathrm{e}^{-\lambda}\left(\frac{\mathrm{e}\lambda}{a}\right)^a$.

c) $\mathrm{e}^{-2}\left(\frac{2\mathrm{e}}{8}\right)^8 \approx 0{,}135\times 0{,}0456 \approx 0{,}0062$.

— Valeur exacte $\approx 0{,}0011$ : la borne est 6 fois trop grande mais du bon ordre, alors que Markov donnerait $\frac{2}{8} = 0{,}25$ et Tchebychev $\frac{2}{36} \approx 0{,}056$.

**Réponse.** $\mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{tX}\right) = \mathrm{e}^{\lambda(\mathrm{e}^t-1)}$ ; borne $\mathrm{e}^{-\lambda}\left(\frac{\mathrm{e}\lambda}{a}\right)^a \approx 0{,}0062$.

## Correction de l'exercice 7 – Fonction convexe et espérance

a) Une fonction convexe dérivable est au-dessus de ses tangentes : pour tout réel $x$,

$$\varphi(x) \geq \varphi(\mu) + \varphi'(\mu)(x-\mu)$$

— On applique à $x = X$ et on prend l'espérance (croissance et linéarité) : $\mathbb{E}(\varphi(X)) \geq \varphi(\mu) + \varphi'(\mu)\times 0$.

b) $\mathbb{E}\left(2^X\right) = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\times 2\right)^{10} = 1{,}5^{10} \approx 57{,}7$ (fonction génératrice en 2), alors que $2^{\mathbb{E}(X)} = 2^5 = 32$ ✓.

c) $\varphi(x) = \mathrm{e}^{tx}$ est convexe, d'où $\mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{tX}\right) \geq \mathrm{e}^{t\mu}$. La borne de Chernoff vérifie donc

— $\mathrm{e}^{-ta}\,\mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{tX}\right) \geq \mathrm{e}^{t(\mu-a)} \geq 1$ si $a\leq\mu$ et $t>0$ : elle ne dit rien.

— **Conclusion** : Chernoff (comme Cantelli) ne sert qu'à majorer des **déviations** au-delà de la moyenne.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

**Réponse.** $\varphi(\mathbb{E}X) \le \mathbb{E}\varphi(X)$ ; 57,7 ≥ 32 ; Chernoff triviale si $a \le \mu$.

## Correction de l'exercice 8 – Méthode du second moment

a) **Cauchy-Schwarz** appliquée à $X$ et $1_{\{X>0\}}$ :

$$\mathbb{E}(X)^2 = \mathbb{E}(X\,1_{\{X>0\}})^2 \le \mathbb{E}\left(X^2\right)\mathbb{E}\left(1_{\{X>0\}}^2\right) = \mathbb{E}\left(X^2\right)\mathbb{P}(X>0)$$

b) $\mathbb{E}\left(X^2\right) = \mathrm{V}(X) + \mathbb{E}(X)^2 = 2$, donc $\mathbb{P}(X>0) \ge \frac{1}{2}$, pour **tout** $n \ge 2$.

c) $n=4$ : $\mathbb{P}(X=0) = \frac{9}{24}$, donc $\mathbb{P}(X>0) = \frac{15}{24} = 0{,}625 \ge 0{,}5$ ✓. Quand $n \to +\infty$, la valeur tend vers $1 - \mathrm{e}^{-1} \approx 0{,}632$.

— **Usage** : la méthode du premier moment ($\mathbb{P}(X \ge 1) \le \mathbb{E}(X)$) montre qu'un objet est **rare** ; celle du second moment qu'il **existe** avec probabilité minorée. Elles sont complémentaires dans l'étude des graphes aléatoires.

**Réponse.** $\mathbb{P}(X>0) \ge \dfrac{\mathbb{E}(X)^2}{\mathbb{E}(X^2)}$ ; au moins $\frac{1}{2}$ (exact : 0,625 pour $n=4$).

## Correction de l'exercice 9 – Méthode du premier moment : triangles d'un graphe aléatoire

a) **Indicatrices** : $T = \sum_{\{i,j,k\}} 1_{\Delta_{ijk}}$, somme sur les $\binom{n}{3}$ triplets, et un triangle exige ses trois arêtes, présentes indépendamment :

$$\mathbb{E}(T) = \binom{n}{3} p^3$$

b) $T$ est à valeurs entières, donc $1_{\{T \ge 1\}} \le T$ ; on prend l'espérance (c'est Markov avec $a=1$).

c) $\binom{100}{3} = 161\,700$ et $p^3 = 10^{-6}$ : $\mathbb{P}(T \ge 1) \le 0{,}162$. Le graphe est sans triangle avec probabilité au moins 0,838.

— Pour $p = \frac{c}{n}$ : $\mathbb{E}(T) = \frac{n(n-1)(n-2)}{6} \cdot \frac{c^3}{n^3} \to \frac{c^3}{6}$ : la borne reste constante, elle ne prouve plus l'absence de triangle. Il faut alors le second moment pour montrer que des triangles apparaissent avec probabilité minorée.

**Réponse.** $\mathbb{E}(T) = \binom{n}{3} p^3$ ; $\mathbb{P}(T \ge 1) \le 0{,}162$ ; limite $\frac{c^3}{6}$.

## Correction de l'exercice 10 – Concentration du nombre de descentes

a) **Bienaymé-Tchebychev** :

$$\mathbb{P}\left(\left|D_n - \frac{n-1}{2}\right| \ge \varepsilon n\right) \le \frac{n+1}{12\varepsilon^2 n^2}$$

b) Pour $\varepsilon > 0$ fixé, on écrit $\left|\frac{D_n}{n} - \frac{1}{2}\right| \le \frac{1}{n}\left|D_n - \frac{n-1}{2}\right| + \frac{1}{2n}$. Pour $n \ge \frac{1}{\varepsilon}$, l'événement $\left\langle\left|\frac{D_n}{n} - \frac{1}{2}\right| \ge \varepsilon\right\rangle$ est inclus dans $\left\langle\left|D_n - \frac{n-1}{2}\right| \ge \frac{\varepsilon}{2}n\right\rangle$, de probabilité au plus $\frac{n+1}{3\varepsilon^2 n^2} \to 0$.

c) $\dfrac{1\,001}{12 \times 0{,}0025 \times 10^6} = \dfrac{1\,001}{30\,000} \approx 0{,}033$ : avec probabilité au moins 0,967, le nombre de descentes est entre 449,5 et 549,5.

— **Point clé** : la variance croît **linéairement** en $n$ (les indicatrices ne sont corrélées qu'entre voisines), l'écart type comme $\sqrt{n}$, négligeable devant la moyenne.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

**Réponse.** Borne $\frac{n+1}{12\varepsilon^2 n^2} \to 0$ ; $\approx 0{,}033$ pour $n = 1\,000$.

## Correction de l'exercice 11 – Variance d'une variable bornée

a) Comme $0 \le X \le 1$, on a $X^2 \le X$, donc $\mathbb{E}\left(X^2\right) \le \mu$ et

$$\mathrm{V}(X) = \mathbb{E}\left(X^2\right) - \mu^2 \le \mu - \mu^2 = \mu(1-\mu) \le \frac{1}{4}$$

— (la dernière inégalité : $\frac{1}{4} - \mu + \mu^2 = \left(\mu - \frac{1}{2}\right)^2 \ge 0$).

b) Égalité si et seulement si $\mathbb{E}\left(X - X^2\right) = 0$, avec $X - X^2 \ge 0$ : donc $X(1-X) = 0$ presque sûrement, $X \in \{0, 1\}$ — c'est une **variable de Bernoulli**.

c) $\mathrm{V}\left(\overline{X}\right) \le \frac{1}{4n}$, et Tchebychev donne $\mathbb{P}\left(|\overline{X} - \mu| \ge 0{,}05\right) \le \frac{1}{4n \times 0{,}0025} = \frac{100}{n}$. On veut $\frac{100}{n} \le 0{,}1$ : $n \ge 1\,000$ clients.

**Réponse.** $\mathrm{V}(X) \le \mu(1-\mu) \le \frac{1}{4}$, égalité pour une Bernoulli ; $n \ge 1\,000$.

## Correction de l'exercice 12 – Écart entre moyenne et médiane

a) Supposons par l'absurde $a = \mu - m > \sigma$. La variable $-X$ a pour espérance $-\mu$ et pour variance $\sigma^2$ ; **Cantelli** donne

$$\mathbb{P}(X \le m) = \mathbb{P}(-X - (-\mu) \ge a) \le \frac{\sigma^2}{\sigma^2 + a^2} < \frac{\sigma^2}{2\sigma^2} = \frac{1}{2}$$

— Cela contredit $\mathbb{P}(X \le m) \ge \frac{1}{2}$. Donc $\mu - m \le \sigma$.

b) Le même raisonnement appliqué à $X$ (avec $\mathbb{P}(X \ge m) \ge \frac{1}{2}$) donne $m - \mu \le \sigma$.

c) $G(0{,}1)$ : $\mu = 10$ et $\sigma = \sqrt{\frac{0{,}9}{0{,}01}} = \sqrt{90} \approx 9{,}49$. Médiane : $\mathbb{P}(X \le m) = 1 - 0{,}9^m \ge \frac{1}{2}$ dès que $m \ge \frac{\ln 2}{-\ln 0{,}9} \approx 6{,}58$, soit $m = 7$.

— $|\mu - m| = 3 \le 9{,}49$ ✓. La loi est très asymétrique, et pourtant l'écart reste inférieur à un écart type.

**Réponse.** $|\mu - m| \le \sigma$ ; pour $G(0{,}1)$ : $|10 - 7| = 3 \le 9{,}49$.

## Correction de l'exercice 13 – Amplifier un algorithme probabiliste

a) $\mathbb{E}(S) = \frac{2n}{3}$, $\mathrm{V}(S) = \frac{2n}{9}$, et $S \le \frac{n}{2}$ entraîne $|S - \frac{2n}{3}| \ge \frac{n}{6}$ :

$$\mathbb{P}\left(S \le \frac{n}{2}\right) \le \frac{2n/9}{n^2/36} = \frac{8}{n}$$

— Erreur $\le 0{,}01$ dès que $n \ge 800$.

b) **Chernoff** sur $-S$ : pour $t > 0$, $\mathbb{P}\left(S \le \frac{n}{2}\right) = \mathbb{P}\left(\mathrm{e}^{-tS} \ge \mathrm{e}^{-tn/2}\right) \le \left[\mathrm{e}^{t/2}\left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3}\mathrm{e}^{-t}\right)\right]^n$.

— Avec $u = \mathrm{e}^{-t}$, on minimise $u^{-1/2}\left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3}u\right)$ : la dérivée s'annule pour $u = \frac{1}{2}$, ce qui donne $\sqrt{2} \times \frac{2}{3}$.

— Erreur $\le 0{,}01$ dès que $n \ge \frac{\ln 100}{-\ln(2\sqrt{2}/3)} \approx 78{,}2$, soit $n \ge 79$.

— **Leçon** : l'erreur décroît **exponentiellement** avec le nombre de répétitions, ce que Tchebychev (décroissance en $\frac{1}{n}$) ne voit pas : 79 exécutions au lieu de 800.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

**Réponse.** Tchebychev : $\frac{8}{n}$, $n \geq 800$ ; Chernoff : $\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)^n$, $n \geq 79$.

## Correction de l'exercice 14 – Loi des grands nombres avec dépendance locale

a) $\mathbb{P}(A_i = 1) = \frac{1}{4}$, donc $\mathbb{E}(F_n) = \frac{1}{4}$.

b) Trois cas :

— $i = j$ : $\mathrm{V}(A_i) = \frac{1}{4} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{16}$ ;

— $|i - j| = 1$ : $A_i A_{i+1} = 1$ exige trois piles consécutifs, d'où $\mathrm{Cov} = \frac{1}{8} - \frac{1}{16} = \frac{1}{16}$ ;

— $|i - j| \geq 2$ : lancers disjoints, covariance nulle.

$$\mathrm{V}\left(\sum_{i=1}^{n} A_i\right) = \frac{3n}{16} + 2(n-1)\frac{1}{16} = \frac{5n-2}{16}$$

c) $\mathrm{V}(F_n) = \frac{5n-2}{16n^2} \leq \frac{5}{16n}$, et Tchebychev donne $\mathbb{P}\left(|F_n - \frac{1}{4}| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{5}{16n\varepsilon^2} \to 0$.

— **Leçon** : la loi faible ne demande pas l'indépendance, seulement $\mathrm{V}\left(\sum A_i\right) = o(n^2)$ ; une dépendance à courte portée suffit largement.

**Réponse.** $\mathbb{E}(F_n) = \frac{1}{4}$ ; $\mathrm{V}(\sum A_i) = \frac{5n-2}{16}$ ; $F_n \to \frac{1}{4}$ en probabilité.

## Correction de l'exercice 15 – Synthèse : la surréservation d'un vol

a) $S \sim B(210; 0{,}9)$ : $\mathbb{E}(S) = 189$ et $\mathrm{V}(S) = 210 \times 0{,}9 \times 0{,}1 = 18{,}9$.

b) $S \geq 201 \Leftrightarrow S - 189 \geq 12$.

— **Tchebychev** : $\mathbb{P}(|S - 189| \geq 12) \leq \frac{18{,}9}{144} \approx 0{,}131$.

— **Cantelli** (unilatérale) :

$$\mathbb{P}(S - 189 \geq 12) \leq \frac{18{,}9}{18{,}9 + 144} \approx 0{,}116$$

c) **Chernoff** : $\mathbb{P}(S \geq 201) \leq \mathrm{e}^{-201t}\left(0{,}1 + 0{,}9\mathrm{e}^{t}\right)^{210}$. Le choix optimal $\mathrm{e}^t = \frac{20{,}1}{8{,}1} \approx 2{,}48$ (qui annule la dérivée de l'exposant) donne une borne $\approx 0{,}0087$.

d) Seule Chernoff ($\approx 0{,}87\,\%$) garantit un risque inférieur à $1\,\%$ ; Tchebychev et Cantelli, qui n'utilisent que la variance, en sont incapables.

— **Lecture économique** : avec 200 billets seulement, 20 places resteraient vides en moyenne ; avec 210 billets, il n'en reste que 11, au prix d'une surréservation dans moins de $0{,}2\,\%$ des vols.

**Réponse.** 189 et 18,9 ; Tchebychev 0,131, Cantelli 0,116, Chernoff 0,0087 (exact 0,0019).

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).