Plaquette 1 – Sommabilité, moments, covariance et inégalités de concentration

Espérance et variance — Prépa MP / MPI (2e année)

Corrections détaillées

Boîte à outils

Existence. X discrète admet une espérance si la famille $(x\,\mathbb{P}(X=x))$ est **sommable** (convergence **absolue**) :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} x\,\mathbb{P}(X=x)$$

— **Transfert** : $\mathbb{E}(g(X)) = \sum_x g(x)\mathbb{P}(X=x)$, sous réserve de sommabilité.

— **Formule de la queue** (variable à valeurs dans $\mathbb{N}$) :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{n \geq 0} \mathbb{P}(X > n) = \sum_{n \geq 1} \mathbb{P}(X \geq n)$$

— Si $|X| \leq Y$ avec Y d'espérance finie, alors X admet une espérance (**domination**).

Propriétés.

— **Linéarité** : $\mathbb{E}(aX+bY) = a\mathbb{E}(X) + b\mathbb{E}(Y)$, sans hypothèse d'indépendance.

— **Positivité et croissance** ; $|\mathbb{E}(X)| \leq \mathbb{E}(|X|)$.

— **Indépendance** : $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$.

Variance et covariance.

$$\mathrm{V}(X) = \mathbb{E}\left(X^2\right) - \mathbb{E}(X)^2 \qquad \mathrm{Cov}(X,Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$$

$$\mathrm{V}\left(\sum_i X_i\right) = \sum_i \mathrm{V}(X_i) + 2\sum_{i<j} \mathrm{Cov}(X_i, X_j)$$

— $\mathrm{V}(aX+b) = a^2\mathrm{V}(X)$.

— **Cauchy-Schwarz** : $|\mathrm{Cov}(X,Y)| \leq \sigma(X)\sigma(Y)$, d'où $\rho = \dfrac{\mathrm{Cov}}{\sigma_X \sigma_Y} \in [-1\,;1]$.

Inégalités de concentration.

— **Markov** ($X \geq 0$, $a > 0$) : $\mathbb{P}(X \geq a) \leq \dfrac{\mathbb{E}(X)}{a}$.

— **Bienaymé-Tchebychev** : $\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}X| \geq \varepsilon) \leq \dfrac{\mathrm{V}(X)}{\varepsilon^2}$.

Correction de l'exercice 1 – Existence d'une espérance

— **Normalisation** : $c\sum_{k \geq 1} \dfrac{1}{k^2} = c\dfrac{\pi^2}{6} = 1$, donc $c = \dfrac{6}{\pi^2} \approx 0{,}6079$.

— **Espérance** : il faudrait sommer

$$\sum_{k \geq 1} k \times \frac{c}{k^2} = c \sum_{k \geq 1} \frac{1}{k}$$

— C'est la **série harmonique**, qui **diverge**.

— **Conclusion** : X n'admet **pas** d'espérance.

— **Leçon** : une loi parfaitement définie peut n'avoir **aucun moment**. L'existence de $\mathbb{E}(X)$ doit toujours être justifiée avant tout calcul.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

— **Exemple célèbre** : le **paradoxe de Saint-Pétersbourg**, où le gain espéré est infini alors que personne ne paierait une mise élevée pour y jouer.

Réponse. $c = \dfrac{6}{\pi^2}$; pas d'espérance (série harmonique).

Correction de l'exercice 2 – Formule de la queue

— **Formule** : pour une variable à valeurs dans $\mathbb{N}^*$, $\mathbb{E}(X) = \sum_{n \geq 0} \mathbb{P}(X > n)$.

— Or $\mathbb{P}(X > n) = q^n$ avec $q = 1 - p$.

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{n \geq 0} q^n = \frac{1}{1-q} = \frac{1}{p}$$

— **Comparaison** : bien plus rapide que la somme $\sum k q^{k-1} p$, qui exige la série géométrique dérivée.

— **Justification de la formule** : en écrivant $X = \sum_{n \geq 0} \mathbf{1}_{\{X > n\}}$ et en prenant l'espérance (interversion licite, termes positifs).

— **Contrôle** ($p = 0{,}2$) : $\mathbb{E}(X) = 5$, et $\sum_{n \geq 0} 0{,}8^n = 5$ ✓

— **Usage** : cette formule est la voie royale pour les **temps d'attente**, où $\mathbb{P}(X > n)$ est souvent plus simple que $\mathbb{P}(X = n)$.

Réponse. $\sum_{n \geq 0} q^n = \dfrac{1}{p}$.

Correction de l'exercice 3 – Espérance par indicatrices

— **Décomposition** : $X = \sum_{i=1}^{n} A_i$ où $A_i = \mathbf{1}_{\{\text{la lettre } i \text{ est bien placée}\}}$.

— **Loi de chaque indicatrice** : par symétrie, la lettre i a une chance sur n d'être bien placée, donc $\mathbb{E}(A_i) = \dfrac{1}{n}$.

— **Linéarité** (valable **sans** indépendance, et les A_i ne le sont pas) :

$$\mathbb{E}(X) = n \times \frac{1}{n} = 1$$

— **Résultat remarquable** : l'espérance vaut 1 **quel que soit** n — en moyenne, une seule lettre arrive à bon port.

— **Contrôle pour** $n = 3$: la loi calculée par énumération est $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{6}\right)$, d'espérance $0 + \frac{1}{2} + 0 + \frac{3}{6} = 1$ ✓

— **Variance** : le calcul (avec les covariances) donne $\mathrm{V}(X) = 1$ également — X est asymptotiquement de loi $P(1)$.

Réponse. $\mathbb{E}(X) = 1$, indépendamment de n.

Correction de l'exercice 4 – Variance d'une somme

— **Espérance** (linéarité) : $\mathbb{E}\left(\overline{X}\right) = \dfrac{1}{n} \times n\mu = \mu$ — l'estimateur est **sans biais**.

— **Variance** : les covariances sont **nulles** (indépendance), donc

$$\mathrm{V}\left(\overline{X}\right) = \frac{1}{n^2} \sum_i \mathrm{V}(X_i) = \frac{n\sigma^2}{n^2} = \frac{\sigma^2}{n}$$

— **Écart type** : $\sigma\left(\overline{X}\right) = \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$ — c'est la fameuse **loi en** $\dfrac{1}{\sqrt{n}}$.

— **Conséquence pratique** : pour **diviser par 2** l'incertitude, il faut **quadrupler** la taille de l'échantillon.

— **Application** : avec $\sigma = 10$ et $n = 100$, l'écart type de la moyenne est 1 ; il faut $n = 400$ pour descendre à 0,5.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

— **Lien avec la LGN** : $\mathrm{V}\left(\overline{X}\right) \to 0$ est exactement ce qui permet d'appliquer Tchebychev pour démontrer la loi des grands nombres.

Réponse. $\mathbb{E}\left(\overline{X}\right) = \mu$ et $\mathrm{V}\left(\overline{X}\right) = \dfrac{\sigma^2}{n}$.

Correction de l'exercice 5 – Covariance

— **Décomposition** : $S = D_1 + D_2$ avec D_1 et D_2 **indépendants**.

— **Bilinéarité** :

$$\mathrm{Cov}(D_1, S) = \mathrm{Cov}(D_1, D_1) + \mathrm{Cov}(D_1, D_2) = \mathrm{V}(D_1) + 0$$

— Or $\mathrm{V}(D_1) = \dfrac{35}{12} \approx 2{,}917$.

— **Coefficient de corrélation** : $\mathrm{V}(S) = 2 \times \dfrac{35}{12} = \dfrac{35}{6}$, donc

$$\rho = \frac{35/12}{\sqrt{35/12}\sqrt{35/6}} = \sqrt{\frac{6}{12}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0{,}707$$

— **Interprétation** : la corrélation est forte mais pas parfaite — le premier dé « explique » la moitié de la variance de la somme ($\rho^2 = 0{,}5$).

— **Contrôle des bornes** : $|\rho| \leq 1$ ✓ (Cauchy-Schwarz), avec égalité seulement si D_1 et S étaient affinement liés, ce qui n'est pas le cas.

Réponse. $\mathrm{Cov}(D_1, S) = \dfrac{35}{12}$, corrélation $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Correction de l'exercice 6 – Covariance dans un tirage sans remise

— **Indicatrices** : $X = \sum_{i=1}^{n} A_i$ où A_i vaut 1 si la i-ième boule tirée est rouge.

— **Espérance** : par symétrie, $\mathbb{P}(A_i = 1) = \dfrac{m}{N}$, donc

$$\mathbb{E}(X) = n\frac{m}{N}$$

— **Variance** : $\mathrm{V}(A_i) = \dfrac{m}{N}\left(1 - \dfrac{m}{N}\right)$, et les covariances sont **non nulles** (tirages dépendants) :

$$\mathrm{Cov}(A_i, A_j) = \frac{m(m-1)}{N(N-1)} - \frac{m^2}{N^2} = -\frac{m(N-m)}{N^2(N-1)}$$

— **Somme** : avec $n(n-1)$ couples ordonnés,

$$\mathrm{V}(X) = n\frac{m}{N}\frac{N-m}{N} \times \frac{N-n}{N-1}$$

— Le facteur $\dfrac{N-n}{N-1}$ est le **facteur de correction** pour population finie.

— **Contrôle** ($N = 12$, $m = 5$, $n = 4$) : $\mathbb{E}(X) = \dfrac{20}{12} \approx 1{,}667$ et $\mathrm{V}(X) = 4 \times \dfrac{5}{12} \times \dfrac{7}{12} \times \dfrac{8}{11} \approx 0{,}707$.

— **Comparaison avec la binomiale** : la variance est **réduite** (facteur < 1) — le tirage sans remise concentre les résultats.

Réponse. $\mathbb{E}(X) = \dfrac{nm}{N}$ et $\mathrm{V}(X) = n\dfrac{m(N-m)}{N^2}\dfrac{N-n}{N-1}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l'exercice 7 – Inégalité de Markov

— **Markov** : $\mathbb{P}(X \geq 12) \leq \dfrac{3}{12} = 0{,}25$.

— **Valeur exacte pour** $P(3)$: $\mathbb{P}(X \geq 12) \approx 7{,}1 \times 10^{-5}$.

— **Écart énorme** : la majoration est environ **3 500 fois** trop grande.

— **Pourquoi ?** Markov n'utilise **que** l'espérance ; elle est optimale pour une loi concentrée en 0 et 12 (avec $\mathbb{P}(X = 12) = 0{,}25$), mais très pessimiste pour une loi concentrée.

— **Avec Tchebychev** (qui utilise la variance V = 3) : $\mathbb{P}(|X - 3| \geq 9) \leq \dfrac{3}{81} \approx 0{,}037$ — dix fois meilleur, mais encore loin.

— **Leçon** : plus on injecte d'information (espérance, puis variance, puis moments exponentiels avec Chernoff), plus la majoration se resserre.

Réponse. Markov : $\leq 0{,}25$; valeur exacte $\approx 7{,}1 \times 10^{-5}$.

Correction de l'exercice 8 – Bienaymé-Tchebychev

— **Modèle** : $nF_n \sim B(n, p)$, donc $\mathbb{E}(F_n) = p$ et $\mathrm{V}(F_n) = \dfrac{p(1-p)}{n}$.

— **Majoration universelle** : $p(1-p) \leq \dfrac{1}{4}$ (maximum en $p = \frac{1}{2}$).

— **Tchebychev** :

$$\mathbb{P}(|F_n - p| \geq 0{,}03) \leq \frac{p(1-p)}{n \times 0{,}0009} \leq \frac{1}{4n \times 0{,}0009} = \frac{277{,}8}{n}$$

— On veut $\dfrac{277{,}8}{n} \leq 0{,}05$, soit $n \geq 5\,556$.

— **Conclusion** : environ 5 600 personnes suffisent, **quelle que soit** la valeur de p.

— **Comparaison avec le TCL** : l'approximation normale donne $n \geq \left(\dfrac{1{,}96}{2 \times 0{,}03}\right)^2 \approx 1\,068$ — cinq fois moins.

— **Compromis** : Tchebychev est **rigoureux et universel** ; le TCL est plus fin mais **approché**. Les instituts utilisent le second.

Réponse. $n \geq 5\,556$ par Tchebychev (environ 1 068 par le TCL).

Correction de l'exercice 9 – Moments factoriels

— **Transfert** :

$$\mathbb{E}[X(X-1)] = \sum_{k=2}^{n} k(k-1)\binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

— **Identité** : $k(k-1)\binom{n}{k} = n(n-1)\binom{n-2}{k-2}$.

— En posant $j = k - 2$:

$$\mathbb{E}[X(X-1)] = n(n-1)p^2 \sum_{j=0}^{n-2} \binom{n-2}{j} p^j q^{n-2-j} = n(n-1)p^2$$

— **Moment d'ordre 2** : $\mathbb{E}\left(X^2\right) = n(n-1)p^2 + np$.

— **Variance** :

$$\mathrm{V}(X) = n(n-1)p^2 + np - n^2p^2 = np - np^2 = np(1-p)$$

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

— **Contrôle** ($n = 10$, $p = 0{,}3$) : $\mathrm{V} = 2{,}1$, et $\mathbb{E}[X(X-1)] = 90 \times 0{,}09 = 8{,}1$, donc $\mathbb{E}\left(X^2\right) = 11{,}1$ et $11{,}1 - 9 = 2{,}1$ ✓

— **Méthode alternative** : la décomposition en indicatrices donne le résultat en deux lignes ; les moments factoriels restent utiles pour les ordres supérieurs.

Réponse. $\mathbb{E}[X(X-1)] = n(n-1)p^2$ et $\mathrm{V}(X) = np(1-p)$.

Correction de l'exercice 10 – Cauchy-Schwarz probabiliste

On pose $U = X - \mathbb{E}(X)$ et $V = Y - \mathbb{E}(Y)$, de sorte que $\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}(UV)$.

— **Fonction auxiliaire** : pour $t \in \mathbb{R}$,

$$\varphi(t) = \mathbb{E}\left[(U + tV)^2\right] = \mathbb{E}\left(U^2\right) + 2t\mathbb{E}(UV) + t^2\mathbb{E}\left(V^2\right) \geq 0$$

— C'est un **trinôme du second degré** en t, toujours positif (espérance d'un carré).

— Son **discriminant** est donc ≤ 0 :

$$4\mathbb{E}(UV)^2 - 4\mathbb{E}\left(U^2\right)\mathbb{E}\left(V^2\right) \leq 0$$

— D'où $|\mathrm{Cov}(X, Y)| \leq \sigma(X)\sigma(Y)$.

— **Cas d'égalité** : le discriminant est nul, donc il existe t_0 avec $\mathbb{E}\left[(U + t_0V)^2\right] = 0$, c'est-à-dire $U = -t_0V$ presque sûrement — X et Y sont liées par une **relation affine**.

— **Conséquence** : $\rho = \pm 1$ caractérise la dépendance **affine** parfaite ; $\rho = 0$ ne signifie **pas** l'indépendance.

Réponse. Discriminant du trinôme $\mathbb{E}\left[(U + tV)^2\right] \geq 0$; égalité ssi relation affine.

Correction de l'exercice 11 – Espérance conditionnelle

— **Espérance conditionnelle** : $\mathbb{E}(X \mid N = n) = np$.

— **Formule de l'espérance totale** :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{n \geq 0} \mathbb{P}(N = n)\,\mathbb{E}(X \mid N = n) = \sum_{n \geq 0} \mathbb{P}(N = n)\,np = p\,\mathbb{E}(N)$$

— Donc $\mathbb{E}(X) = \lambda p$.

— **Cohérence** : on a montré au chapitre précédent que $X \sim P(\lambda p)$, dont l'espérance est bien λp ✓

— **Formulation générale** : $\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}[\mathbb{E}(X \mid N)]$ — le **conditionnement par tranches**.

— **Variance totale** : de même, $\mathrm{V}(X) = \mathbb{E}[\mathrm{V}(X \mid N)] + \mathrm{V}[\mathbb{E}(X \mid N)] = \lambda pq + p^2\lambda = \lambda p$ ✓ — cohérent avec une loi de Poisson.

— **Puissance de la méthode** : elle évite entièrement le calcul de la loi de X.

Réponse. $\mathbb{E}(X) = \lambda p$.

Correction de l'exercice 12 – Un moment d'ordre 2 entraîne une espérance

a) **Domination** : pour tout réel x, $(|x| - 1)^2 \geq 0$ donne

$$|x| \leq \frac{1 + x^2}{2}$$

— La variable $\dfrac{1 + X^2}{2}$ est d'espérance finie, donc $|X|$ aussi : X admet une espérance.

— **Inégalité** : la variance est l'espérance d'un carré, donc $0 \leq \mathrm{V}(X) = \mathbb{E}\left(X^2\right) - \mathbb{E}(X)^2$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

b) **Normalisation** : $c = \dfrac{1}{\zeta(3)}$ avec $\zeta(3) = \sum_{k \geq 1} \dfrac{1}{k^3} \approx 1{,}2021$.

— **Espérance** : $\sum_{k \geq 1} k \dfrac{c}{k^3} = c\,\zeta(2)$ converge, et $\mathbb{E}(X) = \dfrac{\pi^2}{6\zeta(3)} \approx 1{,}368$.

— **Moment d'ordre 2** : $\sum_{k \geq 1} k^2 \dfrac{c}{k^3} = c \sum_{k \geq 1} \dfrac{1}{k}$ diverge (série harmonique) : pas de variance.

— **Leçon** : la réciproque de a) est fausse ; les moments existent « du bas vers le haut ».

Réponse. a) $|x| \leq \dfrac{1+x^2}{2}$; b) $\mathbb{E}(X) = \dfrac{\pi^2}{6\zeta(3)} \approx 1{,}368$, $\mathbb{E}\left(X^2\right) = +\infty$.

Correction de l'exercice 13 – La variance comme écart quadratique minimal

a) On écrit $X - a = (X - \mu) + (\mu - a)$ et on développe :

$$\mathbb{E}\left[(X-a)^2\right] = \mathbb{E}\left[(X-\mu)^2\right] + 2(\mu - a)\mathbb{E}(X - \mu) + (\mu - a)^2$$

— Le terme du milieu est nul car $\mathbb{E}(X - \mu) = 0$ (linéarité), d'où $f(a) = \mathrm{V}(X) + (\mu - a)^2$.

b) $f(a) \geq \mathrm{V}(X)$ avec égalité si et seulement si $a = \mu$: l'espérance est la **meilleure prédiction constante** au sens quadratique, et l'erreur minimale est la variance.

c) Pour un dé, $\mu = \dfrac{7}{2}$ et $\mathrm{V}(X) = \dfrac{35}{12}$:

— $f(3{,}5) = \dfrac{35}{12} \approx 2{,}917$;

— $f(3) = \dfrac{35}{12} + \dfrac{1}{4} = \dfrac{19}{6} \approx 3{,}167$.

— **Remarque** : la formule de König-Huygens est le cas $a = 0$: $\mathbb{E}\left(X^2\right) = \mathrm{V}(X) + \mu^2$.

Réponse. $\min f = \mathrm{V}(X)$ atteint en $a = \mathbb{E}(X)$; dé : $f(3) = \dfrac{19}{6}$, $f(3{,}5) = \dfrac{35}{12}$.

Correction de l'exercice 14 – Moments d'une loi de Poisson par transfert

a) **Transfert** (les termes $k = 0$ et $k = 1$ sont nuls) :

$$\mathbb{E}[X(X-1)] = \sum_{k \geq 2} k(k-1)\mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} = \lambda^2 \mathrm{e}^{-\lambda} \sum_{j \geq 0} \frac{\lambda^j}{j!} = \lambda^2$$

— Donc $\mathbb{E}\left(X^2\right) = \lambda^2 + \lambda$ et $\mathrm{V}(X) = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda$.

b) **Transfert**, la série converge absolument (termes positifs majorés par ceux de la loi) :

$$\mathbb{E}\left(\frac{1}{X+1}\right) = \sum_{k \geq 0} \frac{\mathrm{e}^{-\lambda}\lambda^k}{(k+1)!} = \frac{\mathrm{e}^{-\lambda}}{\lambda} \sum_{j \geq 1} \frac{\lambda^j}{j!} = \frac{1 - \mathrm{e}^{-\lambda}}{\lambda}$$

c) Pour $\lambda = 2$: $\dfrac{1 - \mathrm{e}^{-2}}{2} \approx 0{,}432$, alors que $\dfrac{1}{3} \approx 0{,}333$.

— **Piège** : $\mathbb{E}(g(X)) \neq g(\mathbb{E}(X))$ en général ; ici g est convexe et l'inégalité va dans le sens $\mathbb{E}(g(X)) \geq g(\mathbb{E}(X))$.

Réponse. a) λ^2 puis $\mathrm{V}(X) = \lambda$; b) $\dfrac{1 - \mathrm{e}^{-\lambda}}{\lambda}$; c) $0{,}432 > 0{,}333$.

Correction de l'exercice 15 – Synthèse : jeu de pile ou face

a) **Indicatrices** : $X = \sum_{i=2}^{n} A_i$ où $A_i = \mathbf{1}_{\{\text{lancer } i \neq \text{ lancer } i-1\}}$.

— Deux lancers consécutifs indépendants diffèrent avec probabilité $\dfrac{1}{2}$, donc $\mathbb{E}(A_i) = \dfrac{1}{2}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

— Il y a $n-1$ indicatrices :

$$\mathbb{E}(X) = \frac{n-1}{2}$$

b) **Variance** : $\mathrm{V}(A_i) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$.

— **Covariances** : si $|i-j| \geq 2$, les indicatrices portent sur des paires **disjointes** de lancers, donc sont indépendantes : covariance nulle.

— Si $j = i+1$ (paires **adjacentes**) : $A_i A_{i+1} = 1$ exige que les lancers $i-1$, i, $i+1$ alternent, ce qui arrive avec probabilité $\frac{1}{4}$. Donc

$$\mathrm{Cov}(A_i, A_{i+1}) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = 0$$

— **Toutes** les covariances sont nulles :

$$\mathrm{V}(X) = (n-1) \times \frac{1}{4} = \frac{n-1}{4}$$

— **Contrôle pour** $n = 2$: $X \sim B\left(\frac{1}{2}\right)$, d'espérance $\frac{1}{2}$ et de variance $\frac{1}{4}$ ✓

— **Remarque** : les A_i sont **deux à deux indépendantes** sans être mutuellement indépendantes — mais cela suffit pour la variance.

Réponse. a) $\frac{n-1}{2}$ · b) $\frac{n-1}{4}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).