Plaquette 5 – Synthèse : modéliser avec l'espérance et la variance

Espérance et variance — Prépa MP / MPI (2e année)

Corrections détaillées

Boîte à outils

Décompositions classiques.

— Temps d'attente par étapes : $T = G_1 + \cdots + G_r$ avec $G_j \sim G(p_j)$ indépendantes :

$$\mathbb{E}(T) = \sum_j \frac{1}{p_j} \qquad \mathrm{V}(T) = \sum_j \frac{1-p_j}{p_j^2}$$

— Comptage : $X = \sum_i 1_{A_i}$, $\mathrm{V}(X) = \sum_i \mathbb{P}(A_i)(1-\mathbb{P}(A_i)) + \sum_{i \neq j} \big(\mathbb{P}(A_i \cap A_j) - \mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}(A_j)\big)$.

— **Premier pas** : $e_k = 1 + \sum_j p_{kj} e_j$ pour une espérance de durée.

Conditionnement. $\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}[\mathbb{E}(Y \mid N)]$ et

$$\mathrm{V}(Y) = \mathbb{E}[\mathrm{V}(Y \mid N)] + \mathrm{V}[\mathbb{E}(Y \mid N)]$$

Décider. Cantelli $\mathbb{P}(X - \mu \geq a) \leq \dfrac{\sigma^2}{\sigma^2 + a^2}$ donne une marge de sécurité valable pour toute loi ; un calcul exact (ou Chernoff) est plus économe quand la loi est connue.

Correction de l'exercice 1 – Collectionneur de vignettes : variance et risque

a) Après avoir obtenu $j-1$ vignettes distinctes, l'attente G_j d'une nouvelle suit $G\left(p_j\right)$ avec $p_j = \frac{n-j+1}{n}$. Donc $T = \sum_{j=1}^{n} G_j$ et

$$\mathbb{E}(T) = \sum_{j=1}^{n} \frac{n}{n-j+1} = nH_n = 6\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{6}\right) = 14{,}7$$

b) Les G_j sont **indépendantes** (nouveaux tirages à chaque étape), donc, avec $k = n-j+1$:

$$\mathrm{V}(T) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1-k/n}{(k/n)^2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{n(n-k)}{k^2} = 6\left(5 + 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{8} + \frac{1}{25}\right) \approx 38{,}99$$

c) $a = 30 - 14{,}7 = 15{,}3$: $\mathbb{P}(T \geq 30) \leq \dfrac{38{,}99}{38{,}99 + 234{,}09} \approx 0{,}143$.

— La borne est presque 5 fois trop grande : la queue de T décroît exponentiellement (c'est une somme de géométriques), ce que la variance seule ne voit pas.

— **Lecture** : $\sigma(T) \approx 6{,}2$; c'est la **dernière** vignette ($\mathrm{V}(G_6) = 30$) qui fait presque toute la variance.

Réponse. $\mathbb{E}(T) = 14{,}7$; $\mathrm{V}(T) \approx 38{,}99$; Cantelli 0,143 (exact 0,030).

Correction de l'exercice 2 – Ouvrir une porte avec un trousseau

a) **Sans remise** : $\mathbb{P}(X = k) = \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-2}{n-1} \cdots \frac{1}{n-k+1} = \frac{1}{n}$, produit télescopique. X est uniforme sur $\{1, \ldots, n\}$:

$$\mathbb{E}(X) = \frac{n+1}{2} \qquad \mathrm{V}(X) = \frac{n^2-1}{12}$$

b) **Avec remise** : chaque essai réussit avec probabilité $\frac{1}{n}$ indépendamment, donc

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$X \sim G\left(\frac{1}{n}\right)$:

— $\mathbb{E}(X) = n$ et $\mathrm{V}(X) = \dfrac{1 - 1/n}{1/n^2} = n(n-1)$.

c) $n = 10$:

— sans remise : $\mathbb{E}(X) = 5{,}5$, $\mathrm{V}(X) = 8{,}25$, écart type $\approx 2{,}87$;
— avec remise : $\mathbb{E}(X) = 10$, $\mathrm{V}(X) = 90$, écart type $\approx 9{,}49$.
— **Lecture** : la distraction double le temps moyen, mais surtout rend la durée imprévisible (non bornée, écart type triplé).

Réponse. Sans remise : $\frac{n+1}{2}$, $\frac{n^2-1}{12}$; avec remise : n, $n(n-1)$; $n = 10$: $\sigma \approx 2{,}87$ contre 9,49.

Correction de l’exercice 3 – Joueur de roulette et marche biaisée

a) $S_n = \sum_{i=1}^{n} Y_i$ avec $Y_i = 2B_i - 1$ et $B_i \sim B(p)$ indépendantes : $\mathbb{E}(Y_i) = 2p - 1 = -0{,}1$ et $\mathrm{V}(Y_i) = 4p(1-p) = 0{,}99$.

$$\mathbb{E}(S_n) = n(2p-1) = -0{,}1\,n \qquad \mathrm{V}(S_n) = 4np(1-p) = 0{,}99\,n$$

b) $n = 1\,000$: $\mathbb{E}(S_n) = -100$, $\mathrm{V}(S_n) = 990$. $S_n \geq 0$ équivaut à $S_n - \mathbb{E}(S_n) \geq 100$; **Cantelli** :

— $\mathbb{P}(S_n \geq 0) \leq \dfrac{990}{990 + 10\,000} \approx 0{,}090$.

c) En général, Cantelli donne

$$\mathbb{P}(S_n \geq 0) \leq \frac{0{,}99\,n}{0{,}99\,n + 0{,}01\,n^2} = \frac{0{,}99}{0{,}99 + 0{,}01\,n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

— **Lecture** : la perte moyenne croît comme n, la dispersion seulement comme $\sqrt{n}$: à long terme, le hasard ne compense plus l’avantage de la maison.

Réponse. $\mathbb{E}(S_n) = -0{,}1n$, $\mathrm{V}(S_n) = 0{,}99n$; $\mathbb{P}(S_{1000} \geq 0) \leq 0{,}090$; limite 0.

Correction de l’exercice 4 – Taille d’une population de branchement

a) $m = 0{,}4 + 0{,}8 = 1{,}2$ et $\mathbb{E}\left(X^2\right) = 0{,}4 + 1{,}6 = 2$, d’où $s^2 = 2 - 1{,}44 = 0{,}56$.

b) Sachant $Z_n = k$, Z_{n+1} est une somme de k variables indépendantes de même loi : espérance km, variance ks^2. **Variance totale** :

$$\mathrm{V}(Z_{n+1}) = \mathbb{E}\left(s^2 Z_n\right) + \mathrm{V}(mZ_n) = s^2 m^n + m^2 \mathrm{V}(Z_n)$$

— et $\mathbb{E}(Z_{n+1}) = m\,\mathbb{E}(Z_n)$.

c) $\mathbb{E}(Z_n) = m^n$. La formule proposée vaut 0 en $n = 0$; si elle est vraie au rang n, alors $m^2 s^2 m^{n-1}\dfrac{m^n - 1}{m-1} + s^2 m^n = s^2 m^n \dfrac{m^{n+1} - m + m - 1}{m-1}$, c’est la formule au rang $n+1$ ✓ (récurrence).

— $n = 10$: $\mathbb{E}(Z_{10}) = 1{,}2^{10} \approx 6{,}19$ et $\mathrm{V}(Z_{10}) \approx 0{,}56 \times 5{,}16 \times 25{,}96 \approx 75{,}0$, écart type $\approx 8{,}7$.
— **Lecture** : l’écart type dépasse la moyenne : la population peut s’éteindre (le cas $Z_n = 0$ garde une probabilité importante) ou exploser.

Réponse. $m = 1{,}2$, $s^2 = 0{,}56$; $\mathbb{E}(Z_{10}) \approx 6{,}19$, $\mathrm{V}(Z_{10}) \approx 75{,}0$.

Correction de l’exercice 5 – Attendre deux six de suite

a) **Premier pas** depuis le départ : on lance une fois ; avec probabilité $\frac{1}{6}$ on obtient un 6 (état « un six »), sinon on revient au départ.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$$e = 1 + \frac{1}{6}f + \frac{5}{6}e$$

— Depuis l'état « un six » : avec probabilité $\frac{1}{6}$ on termine, sinon on revient au départ : $f = 1 + \frac{5}{6}e$.

b) La première équation donne $\frac{1}{6}e = 1 + \frac{1}{6}f$, soit $e = 6 + f$. En reportant : $e = 6 + 1 + \frac{5}{6}e$, d'où $\frac{1}{6}e = 7$ et $e = 42$; puis $f = 36$.

c) $r = 1$: $\frac{36-6}{5} = 6$, l'espérance d'une loi $G\left(\frac{1}{6}\right)$ ✓. $r = 2$: $\frac{216-6}{5} = 42$ ✓.

— **Piège** : on aurait envie de répondre 36 (inverse de la probabilité $\frac{1}{36}$ d'un double six à une position donnée) ; mais les essais se chevauchent et un échec ramène au départ, d'où le surcoût.

Réponse. $e = 42$ lancers en moyenne ($f = 36$).

Correction de l'exercice 6 – Durée moyenne d'une partie de pile ou face

a) Si $k \in \{0, N\}$, la partie est finie : durée nulle. Sinon, on joue un coup (d'où le 1), puis on se retrouve en $k-1$ ou $k+1$ avec probabilité $\frac{1}{2}$ chacun : c'est la **formule de l'espérance totale** conditionnée par le premier lancer.

b) Avec $e_k = k(N-k)$: les bords sont nuls ✓, et

$$e_{k-1} + e_{k+1} = (k-1)(N-k+1) + (k+1)(N-k-1) = 2k(N-k) - 2$$

— d'où $1 + \frac{1}{2}(e_{k-1} + e_{k+1}) = 1 + k(N-k) - 1 = e_k$ ✓.

— (L'unicité : la différence de deux solutions vérifie $d_k = \frac{1}{2}(d_{k-1} + d_{k+1})$, est donc arithmétique, et nulle aux deux bords.)

c) $k = 5$: $e_5 = 25$ lancers en moyenne. $k = 1$: $e_1 = 9$.

— **Contraste** : avec 1 € contre 9 €, le petit joueur perd avec probabilité 0,9, mais la partie dure tout de même 9 coups en moyenne.

Réponse. $e_k = k(N-k)$; 25 et 9 lancers.

Correction de l'exercice 7 – Estimer une population par capture-recapture

a) X suit la loi hypergéométrique : $\mathbb{E}(X) = n\frac{m}{N}$. On égale la valeur observée à son espérance (méthode des moments) :

$$X = \frac{nm}{N} \quad \Longrightarrow \quad \hat{N} = \frac{nm}{X}$$

b) $\hat{N} = \frac{80 \times 100}{16} = 500$ poissons.

c) **Variance hypergéométrique** :

$$\mathrm{V}(X) = n\frac{m}{N}\left(1 - \frac{m}{N}\right)\frac{N-n}{N-1} = 80 \times 0{,}2 \times 0{,}8 \times \frac{420}{499} \approx 10{,}77$$

— Écart type $\approx 3{,}28$: avec X entre 13 et 19, l'estimation varie de 421 à 615 poissons.

d) $\mathbb{P}(X = 0) > 0$ (si $N - m \geq n$) et $\frac{mn}{X}$ vaut alors $+\infty$: la variable n'est pas à valeurs réelles finies, elle n'a pas d'espérance. En pratique on utilise $\frac{(m+1)(n+1)}{X+1} - 1$ (estimateur de Chapman), toujours fini.

Réponse. $\hat{N} = \frac{nm}{X} = 500$; $\sigma(X) \approx 3{,}28$; $\mathbb{P}(X = 0) > 0$ empêche l'espérance.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l'exercice 8 – Coût du tri par insertion

a) U_j uniforme sur $\{0,\dots,j-1\}$: $\mathbb{E}(U_j)=\frac{j-1}{2}$, donc $\mathbb{E}(I)=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}(j-1)=\frac{n(n-1)}{4}$.

b) $\mathrm{V}(U_j)=\frac{j^2-1}{12}$ (loi uniforme à j valeurs), et par **indépendance** :

$$\mathrm{V}(I)=\frac{1}{12}\left(\sum_{j=1}^{n}j^2-n\right)=\frac{1}{12}\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}-n\right)=\frac{n(n-1)(2n+5)}{72}$$

c) $n=10$: $\mathbb{E}(I)=22{,}5$ échanges et $\mathrm{V}(I)=\frac{10\times 9\times 25}{72}=31{,}25$, écart type $\approx 5{,}6$.

— **Contrôle** $n=3$: les 6 permutations ont $0,1,1,2,2,3$ inversions ; moyenne $1{,}5=\frac{3\times 2}{4}$ ✓ ; $\mathbb{E}\left(I^2\right)=\frac{19}{6}$ et $\mathrm{V}(I)=\frac{19}{6}-\frac{9}{4}=\frac{11}{12}=\frac{3\times 2\times 11}{72}$ ✓.

— **Lecture** : le coût moyen est quadratique ($\sim\frac{n^2}{4}$) avec un écart type d'ordre $n^{3/2}$, petit devant : le tri par insertion est lent de façon très régulière.

Réponse. $\mathbb{E}(I)=\frac{n(n-1)}{4}$, $\mathrm{V}(I)=\frac{n(n-1)(2n+5)}{72}$; 22,5 et 31,25 pour $n=10$.

Correction de l'exercice 9 – Prix d'une option dans un modèle binomial

a) Avec $K\sim B\left(3,\frac{1}{2}\right)$ hausses : $S_3=100\times 1{,}1^{K}0{,}9^{3-K}$, qui vaut 133,1 ; 108,9 ; 89,1 ; 72,9 avec probabilités $\frac{1}{8}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{1}{8}$.

— $S_3=100Z_1Z_2Z_3$ avec Z_i indépendants, $\mathbb{E}(Z_i)=1$ et $\mathbb{E}\left(Z_i^2\right)=\frac{1{,}21+0{,}81}{2}=1{,}01$:

$$\mathbb{E}(S_3)=100\qquad \mathrm{V}(S_3)=100^2\left(1{,}01^3-1\right)\approx 303{,}0$$

b) **Transfert** : seules les deux valeurs supérieures à 100 comptent :

$$\mathbb{E}\left[(S_3-100)^+\right]=\frac{1}{8}\times 33{,}1+\frac{3}{8}\times 8{,}9=\frac{59{,}8}{8}=7{,}475$$

c) La fonction $x\mapsto(x-100)^+$ est **convexe** : $\mathbb{E}\left[(S_3-100)^+\right]\geq(\mathbb{E}(S_3)-100)^+=0$. L'option profite des hausses sans subir les baisses : sa valeur vient de la **variance** du cours, pas de sa moyenne.

Réponse. $\mathbb{E}(S_3)=100$, $\mathrm{V}(S_3)\approx 303$; espérance de l'option 7,475 €.

Correction de l'exercice 10 – Fixer une prime d'assurance

a) $S=10\,000K$ avec $\mathbb{E}(K)=10$ et $\mathrm{V}(K)=9{,}9$: $\mathbb{E}(S)=100\,000$ € et $\mathrm{V}(S)=10^8\times 9{,}9=9{,}9\times 10^8$, soit $\sigma(S)\approx 31\,464$ €.

b) On cherche $a=n\pi-100\,000>0$ tel que $\frac{\sigma^2}{\sigma^2+a^2}\leq 0{,}05$, c'est-à-dire $a^2\geq 19\sigma^2$:

$$a\geq\sigma\sqrt{19}\approx 137\,150\quad\Longrightarrow\quad\pi\geq\frac{100\,000+137\,150}{1\,000}\approx 237{,}15$$

— Cantelli garantit le risque de 5 % avec une prime de 237,15 €, valable **quelle que soit** la loi exacte des sinistres.

c) Si les recettes couvrent 15 sinistres, soit $n\pi\geq 150\,000$, le risque est $\mathbb{P}(K\geq 16)\approx 0{,}048\leq 0{,}05$: une prime de 150 € suffit.

— **Lecture** : la prime « pure » est 100 € ; le chargement de sécurité vaut 50 € avec la loi exacte, 137 € avec la seule variance. Connaître la loi permet de vendre moins cher.

Réponse. $\mathbb{E}(S)=100\,000$ €, $\sigma\approx 31\,464$ € ; Cantelli : $\pi\approx 237{,}15$ € ; loi exacte : 150 €.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l'exercice 11 – Nombre de groupes de places occupées

a) Chaque groupe a un **premier siège** et un seul : un siège occupé dont le voisin de gauche est libre (ou qui est le premier de la rangée). Compter les groupes revient à compter ces sièges.

b) $\mathbb{P}(B_1) = p$ et, pour $i \geq 2$, $\mathbb{P}(B_i) = qp$ par indépendance. **Linéarité** :

$$\mathbb{E}(G) = p + (n-1)pq$$

c) $n = 50$, $p = 0{,}6$: $\mathbb{E}(G) = 0{,}6 + 49 \times 0{,}24 = 12{,}36$ groupes.

— Pour n grand, $\mathbb{E}(G) \approx npq$, maximal pour $p = \frac{1}{2}$ (maximum de $p(1-p)$) : environ $\frac{n}{4}$ groupes.

— **Interprétation** : trop peu de spectateurs donne peu de groupes, trop de spectateurs les soude en quelques blocs ; le morcellement est maximal à mi-remplissage.

Réponse. $\mathbb{E}(G) = p + (n-1)pq$; 12,36 ; maximum pour $p = \frac{1}{2}$.

Correction de l'exercice 12 – Hétérogénéité et variance

a) **Linéarité** : $\mathbb{E}(X) = \sum_i p_i = n\overline{p}$. **Indépendance** :

$$\mathrm{V}(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i(1-p_i) = n\overline{p} - \sum_i p_i^2$$

b) Par Cauchy-Schwarz (ou convexité du carré), $\sum_i p_i^2 \geq \frac{1}{n}\left(\sum_i p_i\right)^2 = n\overline{p}^2$, donc $\mathrm{V}(X) \leq n\overline{p} - n\overline{p}^2 = n\overline{p}(1-\overline{p})$, avec égalité si et seulement si tous les p_i sont égaux.

c) $\overline{p} = 0{,}3$:

— $\mathrm{V}(X) = 10 \times 0{,}09 + 10 \times 0{,}25 = 3{,}4$;

— binomiale $B(20; 0{,}3)$: $20 \times 0{,}21 = 4{,}2$.

— **Lecture** : à moyenne égale, l'hétérogénéité **réduit** la variance du total, contrairement au mélange (paramètre tiré au hasard **une fois** pour tous), qui l'augmente.

Réponse. $\mathrm{V}(X) = \sum p_i(1-p_i) \leq n\overline{p}(1-\overline{p})$; 3,4 contre 4,2.

Correction de l'exercice 13 – Arrêts d'un ascenseur

a) **Indicatrices** : $Y = \sum_{e=1}^{m} 1_{V_e}$, où V_e = « personne ne descend à l'étage e », de probabilité $\left(1 - \frac{1}{m}\right)^k = 0{,}9^8 \approx 0{,}4305$.

— $\mathbb{E}(Y) = 10 \times 0{,}9^8 \approx 4{,}305$, donc $\mathbb{E}(A) = 10\left(1 - 0{,}9^8\right) \approx 5{,}695$ arrêts.

b) Pour $e \neq e'$, $\mathbb{P}(V_e \cap V_{e'}) = \left(1 - \frac{2}{m}\right)^k = 0{,}8^8$. **Variance d'une somme** :

$$\mathrm{V}(Y) = m\,0{,}9^8\left(1 - 0{,}9^8\right) + m(m-1)\left(0{,}8^8 - 0{,}9^{16}\right)$$

— Numériquement :
$10 \times 0{,}4305 \times 0{,}5695 + 90 \times (0{,}16777 - 0{,}18530) \approx 2{,}452 - 1{,}578 \approx 0{,}874$.

— $A = m - Y$, donc $\mathrm{V}(A) = \mathrm{V}(Y) \approx 0{,}874$ (écart type $\approx 0{,}93$).

— **Remarque** : les covariances sont **négatives** (si un étage est vide, les autres reçoivent plus de monde), ce qui réduit fortement la variance.

Réponse. $\mathbb{E}(A) \approx 5{,}70$ arrêts ; $\mathrm{V}(A) \approx 0{,}874$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l'exercice 14 – Contrôle séquentiel d'une production

a) $X = \min(G, N)$ où G est le rang de la première pièce défectueuse. Pour $0 \leq k \leq N-1$, $\mathbb{P}(X > k) = \mathbb{P}(G > k) = q^k$, et $\mathbb{P}(X > k) = 0$ pour $k \geq N$.

b) **Formule de la queue** :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=0}^{N-1} q^k = \frac{1-q^N}{1-q} = \frac{1-q^N}{p}$$

c) $\mathbb{E}(X) = \dfrac{1-0{,}98^{50}}{0{,}02} \approx \dfrac{1-0{,}364}{0{,}02} \approx 31{,}8$ pièces.

— **Contrôles** : $N \to +\infty$ redonne $\frac{1}{p} = 50$ ✓ ; $N = 1$ donne 1 ✓.

— **Interprétation** : le plafond à 50 économise environ 18 inspections en moyenne par rapport à une attente non bornée, et dans 36 % des cas ($0{,}98^{50}$) le lot est accepté sans défaut détecté.

Réponse. $X = \min(G, N)$; $\mathbb{E}(X) = \dfrac{1-q^N}{p} \approx 31{,}8$.

Correction de l'exercice 15 – Synthèse : le paradoxe de l'attente du bus

a) $\mathbb{E}(L) = \dfrac{5+15}{2} = 10$ minutes.

b) $\mathbb{P}(L^* = 5) = \dfrac{5 \times 0{,}5}{10} = 0{,}25$ et $\mathbb{P}(L^* = 15) = \dfrac{15 \times 0{,}5}{10} = 0{,}75$: la loi est **biaisée par la taille**. Donc

$$\mathbb{E}(L^*) = \sum_{\ell} \ell \, \frac{\ell \, \mathbb{P}(L=\ell)}{\mathbb{E}(L)} = \frac{\mathbb{E}\left(L^2\right)}{\mathbb{E}(L)} = \frac{125}{10} = 12{,}5$$

c) Sachant $L^* = \ell$, l'attente moyenne est $\frac{\ell}{2}$; par **espérance totale**, l'attente moyenne vaut $\dfrac{12{,}5}{2} = 6{,}25$ minutes, et non 5.

d) **König-Huygens** : $\mathbb{E}\left(L^2\right) = \mathrm{V}(L) + \mathbb{E}(L)^2$, donc

$$\mathbb{E}(L^*) = \frac{\mathbb{E}\left(L^2\right)}{\mathbb{E}(L)} = \mathbb{E}(L) + \frac{\mathrm{V}(L)}{\mathbb{E}(L)} \geq \mathbb{E}(L)$$

— Ici $\mathrm{V}(L) = 25$: $10 + 2{,}5 = 12{,}5$ ✓.

— **Lecture** : on tombe plus souvent dans les longs intervalles, simplement parce qu'ils occupent plus de temps. L'écart disparaît seulement si $\mathrm{V}(L) = 0$ (bus parfaitement réguliers) : la régularité réduit l'attente même à fréquence égale.

Réponse. $\mathbb{E}(L) = 10$; $\mathbb{E}(L^*) = 12{,}5$; attente 6,25 min au lieu de 5.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).