Plaquette 2 – Existence et calcul d'espérances : sommabilité, transfert, queue de loi

Espérance et variance — Prépa MP / MPI (2e année)

Exercices

Méthode

Avant tout calcul, on **justifie l'existence** de l'espérance (convergence **absolue** de la série, ou domination). On choisit ensuite l'outil le plus court : **transfert** quand la loi de X est connue, **formule de la queue** quand $\mathbb{P}(X > n)$ est simple (maximum, minimum, temps d'attente), **indicatrices** quand X compte des événements, **conditionnement par le premier pas** pour les temps d'attente de motifs.

Exercice 1 – Moments factoriels de la loi de Poisson

Soit $X \sim P(\lambda)$ et $r \in \mathbb{N}^*$.

a) Justifier que $X(X-1)\cdots(X-r+1)$ admet une espérance et la calculer.

b) En déduire $\mathbb{E}\left(X^3\right)$ pour $\lambda = 2$.

Exercice 2 – Transfert : la fonction puissance d'une loi géométrique

Soit $X \sim G(p)$, $q = 1-p$, et a un réel.

a) Pour quels a la variable a^X admet-elle une espérance ? La calculer.

b) Même question pour $X \sim P(\lambda)$.

Exercice 3 – Espérance de l'inverse d'une variable géométrique

Soit $X \sim G(p)$ avec $0 < p < 1$. Calculer $\mathbb{E}\left(\frac{1}{X}\right)$, puis la comparer à $\frac{1}{\mathbb{E}(X)}$ pour $p = \frac{1}{2}$.

Exercice 4 – Une queue en 1/n

Soit X à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ telle que $\mathbb{P}(X \geq n) = \frac{1}{n}$ pour tout $n \geq 1$.

a) Déterminer la loi de X.

b) X admet-elle une espérance ?

c) $\sqrt{X}$ admet-elle une espérance ?

Exercice 5 – Maximum et minimum de deux géométriques

Soient X, Y indépendantes de loi $G(p)$, $q = 1-p$. On pose $U = \min(X, Y)$ et $V = \max(X, Y)$.

a) Calculer $\mathbb{P}(U > n)$ et reconnaître la loi de U.

b) Calculer $\mathbb{E}(V)$ par la formule de la queue.

c) Vérifier la cohérence avec $U + V = X + Y$, puis donner les valeurs pour $p = \frac{1}{2}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 6 – Produit de deux variables de carré intégrable

Soient X et Y deux variables discrètes admettant un moment d'ordre 2 (on ne suppose **pas** l'indépendance).

a) Montrer que XY admet une espérance.

b) Montrer que $X+Y$ admet un moment d'ordre 2.

c) En déduire que l'ensemble des variables admettant un moment d'ordre 2 est un espace vectoriel.

Exercice 7 – Une série convergente qui ne suffit pas

Soit X de loi $\mathbb{P}\left(X=(-1)^k k\right)=\dfrac{6}{\pi^2 k^2}$ pour $k\geq 1$.

a) Vérifier qu'il s'agit d'une loi de probabilité.

b) La série $\sum_k (-1)^k k\,\mathbb{P}\left(X=(-1)^k k\right)$ converge-t-elle ?

c) X admet-elle une espérance ?

Exercice 8 – Minimum de deux dés par la queue

On lance deux dés équilibrés indépendants ; m est le plus petit résultat et M le plus grand.

a) Calculer $\mathbb{P}(m\geq k)$ pour $1\leq k\leq 6$.

b) En déduire $\mathbb{E}(m)$ par la formule de la queue.

c) En déduire $\mathbb{E}(M)$ sans nouveau calcul de loi.

Exercice 9 – Nombre moyen de descentes d'une permutation

Soit σ une permutation de $\{1,\dots,n\}$ choisie uniformément ($n\geq 2$). Une **descente** est un indice $i\leq n-1$ tel que $\sigma(i)>\sigma(i+1)$. Calculer le nombre moyen $\mathbb{E}(D)$ de descentes, puis vérifier pour $n=3$ par énumération.

Exercice 10 – Nombre moyen de cycles d'une permutation

Soit σ uniforme sur S_n et C son nombre de cycles (points fixes compris). Pour $i\in\{1,\dots,n\}$, on note L_i la longueur du cycle contenant i.

a) Montrer que $\mathbb{P}(L_i=k)=\dfrac{1}{n}$ pour $1\leq k\leq n$.

b) Justifier que $C=\sum_{i=1}^{n}\dfrac{1}{L_i}$.

c) En déduire $\mathbb{E}(C)$ et le contrôler pour $n=4$ (6, 11, 6, 1 permutations ont respectivement 1, 2, 3, 4 cycles).

Exercice 11 – Moment d'ordre 2 par la queue

Soit X à valeurs dans $\mathbb{N}$.

a) Montrer que $\mathbb{E}\left(X^2\right)=\sum_{n\geq 0}(2n+1)\,\mathbb{P}(X>n)$ (égalité dans $[0,+\infty]$).

b) Application : retrouver $\mathbb{E}\left(X^2\right)$ et $\mathrm{V}(X)$ pour $X\sim G(p)$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 12 – Attendre deux piles consécutifs

On lance une pièce équilibrée jusqu'à obtenir **deux piles consécutifs** ; T est le nombre de lancers. On admet que $\mathbb{E}(T)$ est finie.

a) En conditionnant par les premiers lancers, établir une équation vérifiée par $e = \mathbb{E}(T)$ et la résoudre.

b) Même question pour le motif « pile puis face ». Commenter.

Exercice 13 – Espérance conditionnelle et absence de mémoire

Soit $X \sim G(p)$ et $m \in \mathbb{N}$.

a) Déterminer la loi conditionnelle de $X - m$ sachant $\{X > m\}$.

b) En déduire $\mathbb{E}(X \mid X > m)$.

c) Un composant électronique a une durée de vie (en mois) de loi $G(0{,}05)$. Il fonctionne depuis 12 mois : quelle durée de vie totale moyenne prévoir ?

Exercice 14 – Temps d'attente du r-ième succès

On répète des épreuves de Bernoulli indépendantes de paramètre p. Soit T_r le rang du r-ième succès.

a) Écrire T_r comme une somme de r variables géométriques et en déduire $\mathbb{E}(T_r)$.

b) Retrouver ce résultat par transfert à partir de $\mathbb{P}(T_r = k) = \binom{k-1}{r-1} p^r q^{k-r}$ $(k \geq r)$.

c) Un commercial conclut une vente avec probabilité 0,15 par appel. Combien d'appels en moyenne pour 6 ventes ?

Exercice 15 – Synthèse : le rang du premier as

On bat un jeu de 52 cartes contenant 4 as et on retourne les cartes une à une. Soit R le rang du premier as.

a) Pour chacune des 48 autres cartes, calculer la probabilité qu'elle sorte avant les quatre as.

b) En déduire $\mathbb{E}(R)$.

c) Calculer de même l'espérance du rang R_2 du deuxième as.

d) Généraliser : urne de N boules dont m blanches, rang moyen de la première blanche.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).