Plaquette 4 – Inégalités de concentration : Markov, Tchebychev, Cantelli et Chernoff

Espérance et variance — Prépa MP / MPI (2e année)

Exercices

Méthode

Toutes les inégalités de concentration dérivent de **Markov** appliquée à une fonction **positive et croissante** bien choisie de X : X^2 (Tchebychev), $(X-\mu+u)^2$ (Cantelli), e^{tX} (Chernoff). Plus la fonction croît vite, plus la borne est fine, mais plus elle exige de moments. On **optimise** ensuite le paramètre libre (u ou t). Pour minorer une probabilité, on utilise **Cauchy-Schwarz** (second moment).

Exercice 1 – Markov appliquée à une puissance

Soit $X \sim P(2)$.

a) Majorer $\mathbb{P}(X \geq 5)$ par l'inégalité de Markov appliquée à X.

b) Même question en appliquant Markov à X^2.

c) Comparer avec la valeur exacte.

Exercice 2 – Markov ne peut pas être améliorée

Soient $m > 0$ et $a \geq m$.

a) Construire une variable $X \geq 0$ d'espérance m telle que $\mathbb{P}(X \geq a) = \frac{m}{a}$.

b) Démontrer l'inégalité de Markov, et caractériser le cas d'égalité.

c) Application : $m = 1$, $a = 4$.

Exercice 3 – Somme de soixante dés

On lance 60 dés équilibrés indépendants ; S est la somme.

a) Calculer $\mathbb{E}(S)$ et $\mathrm{V}(S)$.

b) Majorer $\mathbb{P}(|S-210| \geq 30)$ par Tchebychev.

c) Trouver ε tel que Tchebychev garantisse $S \in]210-\varepsilon, 210+\varepsilon[$ avec probabilité au moins 0,95.

Exercice 4 – L'inégalité de Cantelli

Soit X d'espérance μ et de variance $\sigma^2 > 0$, et $a > 0$.

a) Pour $u \geq 0$, montrer que $\mathbb{P}(X-\mu \geq a) \leq \dfrac{\sigma^2+u^2}{(a+u)^2}$.

b) Optimiser en u et en déduire l'inégalité de Cantelli.

c) Comparer à Tchebychev pour $a = 2\sigma$.

Exercice 5 – Chernoff pour la loi binomiale

Soit $S \sim B\left(100, \frac{1}{2}\right)$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

a) Montrer que pour tout $t > 0$, $\mathbb{P}(S \geq 75) \leq \mathrm{e}^{-75t}\left(\frac{1+\mathrm{e}^{t}}{2}\right)^{100}$.

b) Optimiser en t et donner la borne obtenue.

c) Comparer à la borne de Tchebychev et à la valeur exacte $\approx 2{,}8 \times 10^{-7}$.

Exercice 6 – Chernoff pour la loi de Poisson

Soit $X \sim P(\lambda)$ et $a > \lambda$.

a) Calculer $\mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{tX}\right)$ pour $t \in \mathbb{R}$.

b) Montrer que $\mathbb{P}(X \geq a) \leq \mathrm{e}^{-\lambda}\left(\frac{\mathrm{e}\lambda}{a}\right)^{a}$.

c) Application : $\lambda = 2$, $a = 8$ (nombre d'appels à un standard en une minute). Comparer à $\mathbb{P}(X \geq 8) \approx 0{,}0011$.

Exercice 7 – Fonction convexe et espérance

Soit φ convexe et dérivable sur $\mathbb{R}$, et X telle que X et $\varphi(X)$ admettent une espérance.

a) En utilisant la tangente en $\mu = \mathbb{E}(X)$, montrer que $\varphi(\mathbb{E}(X)) \leq \mathbb{E}(\varphi(X))$.

b) Application : $X \sim B\left(10, \frac{1}{2}\right)$; comparer $\mathbb{E}\left(2^{X}\right)$ et $2^{\mathbb{E}(X)}$.

c) En déduire que $\mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{tX}\right) \geq \mathrm{e}^{t\mu}$: pourquoi Chernoff n'est-elle utile que pour $a > \mu$?

Exercice 8 – Méthode du second moment

Soit X une variable à valeurs dans $\mathbb{N}$, avec $\mathbb{E}\left(X^2\right) > 0$ fini.

a) En écrivant $X = X\,1_{\{X>0\}}$, montrer que $\mathbb{P}(X > 0) \geq \dfrac{\mathbb{E}(X)^2}{\mathbb{E}\left(X^2\right)}$.

b) Application : X est le nombre de points fixes d'une permutation uniforme de S_n ($n \geq 2$), avec $\mathbb{E}(X) = \mathrm{V}(X) = 1$. Minorer la probabilité qu'il y ait au moins un point fixe.

c) Comparer avec la valeur exacte pour $n = 4$ (il y a 9 dérangements).

Exercice 9 – Méthode du premier moment : triangles d'un graphe aléatoire

Dans un graphe aléatoire à n sommets, chacune des $\binom{n}{2}$ arêtes possibles est présente indépendamment avec probabilité p. Soit T le nombre de triangles.

a) Calculer $\mathbb{E}(T)$.

b) Montrer que $\mathbb{P}(T \geq 1) \leq \mathbb{E}(T)$.

c) Application : $n = 100$, $p = 0{,}01$. Que dire si $p = \frac{c}{n}$ avec c fixé et $n \to +\infty$?

Exercice 10 – Concentration du nombre de descentes

Le nombre D_n de descentes d'une permutation uniforme de S_n vérifie $\mathbb{E}(D_n) = \frac{n-1}{2}$ et $\mathrm{V}(D_n) = \frac{n+1}{12}$.

a) Majorer $\mathbb{P}\left(\left|D_n - \frac{n-1}{2}\right| \geq \varepsilon n\right)$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

b) En déduire que $\frac{D_n}{n}$ converge en probabilité vers $\frac{1}{2}$.

c) Application : $n = 1\,000$, $\varepsilon = 0{,}05$.

Exercice 11 – Variance d'une variable bornée

Soit X à valeurs dans $[0,1]$, d'espérance μ.

a) Montrer que $\mathrm{V}(X) \leq \mu(1-\mu) \leq \frac{1}{4}$.

b) Quand y a-t-il égalité dans la première inégalité ?

c) Application : un indicateur de satisfaction est noté entre 0 et 1 par n clients indépendants ; combien en interroger pour que, d'après Tchebychev, la moyenne soit à moins de 0,05 de μ avec probabilité au moins 0,9 ?

Exercice 12 – Écart entre moyenne et médiane

Soit X d'espérance μ et d'écart type $\sigma > 0$, et m une **médiane** : $\mathbb{P}(X \leq m) \geq \frac{1}{2}$ et $\mathbb{P}(X \geq m) \geq \frac{1}{2}$.

a) En appliquant l'inégalité de Cantelli à $-X$, montrer que $\mu - m \leq \sigma$.

b) En déduire $|\mu - m| \leq \sigma$.

c) Vérifier sur $X \sim G(0{,}1)$.

Exercice 13 – Amplifier un algorithme probabiliste

Un algorithme répond correctement avec probabilité $\frac{2}{3}$. On l'exécute n fois indépendamment et on retient la **réponse majoritaire** ; soit $S \sim B\left(n, \frac{2}{3}\right)$ le nombre de bonnes réponses. L'erreur se produit si $S \leq \frac{n}{2}$.

a) Majorer $\mathbb{P}\left(S \leq \frac{n}{2}\right)$ par Tchebychev. Quel n garantit une erreur $\leq 1\,\%$?

b) Montrer par Chernoff que $\mathbb{P}\left(S \leq \frac{n}{2}\right) \leq \left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)^n$ et répondre à la même question.

Exercice 14 – Loi des grands nombres avec dépendance locale

On lance une pièce équilibrée $n+1$ fois. Pour $1 \leq i \leq n$, A_i vaut 1 si les lancers i et $i+1$ donnent tous deux pile. On pose $F_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} A_i$.

a) Calculer $\mathbb{E}(F_n)$.

b) Calculer $\mathrm{Cov}(A_i, A_j)$ selon $|i-j|$ et en déduire $\mathrm{V}\left(\sum_i A_i\right)$.

c) Montrer que F_n converge en probabilité vers $\frac{1}{4}$, bien que les A_i ne soient pas indépendantes.

Exercice 15 – Synthèse : la surréservation d'un vol

Une compagnie vend 210 billets pour un avion de 200 places ; chaque passager se présente indépendamment avec probabilité 0,9. Soit S le nombre de passagers présents.

a) Calculer $\mathbb{E}(S)$ et $\mathrm{V}(S)$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

b) Majorer la probabilité de surréservation $\mathbb{P}(S \geq 201)$ par Tchebychev, puis par Cantelli.

c) Majorer cette probabilité par Chernoff, avec le choix optimal $e^t = \frac{201 \times 0{,}1}{9 \times 0{,}9}$.

d) La valeur exacte est $\approx 0{,}0019$. Quelle borne utiliser pour garantir un risque inférieur à 1 % ?

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).