Plaquette 1 – Sommabilité, moments, covariance et inégalités de concentration

Espérance et variance — Prépa MP / MPI (2e année)

Exercices

Méthode

On justifie l'**existence** d'un moment par sommabilité, on calcule par **transfert** ou par décomposition en indicatrices, on exploite la **linéarité** et la **covariance**, et on conclut par **Markov**, **Tchebychev** ou **Cauchy-Schwarz**.

Exercice 1 – Existence d'une espérance

Soit X de loi $\mathbb{P}(X=k)=\dfrac{c}{k^2}$ pour $k\geq 1$. Déterminer c et dire si X admet une espérance.

Exercice 2 – Formule de la queue

Soit $X\sim G(p)$. Retrouver $\mathbb{E}(X)=\dfrac{1}{p}$ par la formule de la queue.

Exercice 3 – Espérance par indicatrices

Dans le problème des n lettres et n enveloppes mélangées, calculer l'espérance du nombre X de lettres bien placées.

Exercice 4 – Variance d'une somme

Soient $X_1,\dots,X_n$ indépendantes de même loi, d'espérance μ et de variance σ^2. Calculer espérance et variance de $\overline{X}=\dfrac{1}{n}\sum X_i$.

Exercice 5 – Covariance

On lance deux dés ; soit S la somme. Calculer $\mathrm{Cov}(D_1,S)$ où D_1 est le premier dé, puis le coefficient de corrélation.

Exercice 6 – Covariance dans un tirage sans remise

On tire n boules sans remise dans une urne de N boules dont m rouges. Calculer $\mathbb{E}(X)$ et $\mathrm{V}(X)$ pour X le nombre de rouges obtenues.

Exercice 7 – Inégalité de Markov

Soit $X\geq 0$ d'espérance 3. Majorer $\mathbb{P}(X\geq 12)$, puis comparer à la valeur exacte si $X\sim P(3)$.

Exercice 8 – Bienaymé-Tchebychev

Un sondage interroge n personnes ; la proportion observée est F_n. Combien faut-il de personnes pour que $\mathbb{P}(|F_n-p|\geq 0{,}03)\leq 0{,}05$?

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 9 – Moments factoriels

Soit $X \sim B(n,p)$. Calculer $\mathbb{E}[X(X-1)]$ et en déduire $\mathrm{V}(X)$.

Exercice 10 – Cauchy-Schwarz probabiliste

Démontrer que $|\mathrm{Cov}(X,Y)| \leq \sigma(X)\sigma(Y)$ et préciser le cas d'égalité.

Exercice 11 – Espérance conditionnelle

Soit $N \sim P(\lambda)$ et, sachant $N=n$, $X \sim B(n,p)$. Calculer $\mathbb{E}(X)$ par conditionnement.

Exercice 12 – Un moment d'ordre 2 entraîne une espérance

Soit X une variable aléatoire discrète réelle.

a) Montrer que si X^2 admet une espérance, alors X aussi, et que $\mathbb{E}(X)^2 \leq \mathbb{E}\left(X^2\right)$.

b) Soit X de loi $\mathbb{P}(X=k) = \dfrac{c}{k^3}$ pour $k \geq 1$. Montrer que X admet une espérance mais pas de variance.

Exercice 13 – La variance comme écart quadratique minimal

Soit X admettant un moment d'ordre 2, d'espérance μ. Pour $a \in \mathbb{R}$, on pose $f(a) = \mathbb{E}\left[(X-a)^2\right]$.

a) Montrer que $f(a) = \mathrm{V}(X) + (\mu - a)^2$.

b) En déduire le minimum de f et où il est atteint.

c) Application : X est le résultat d'un dé équilibré. Calculer $f(3)$ et $f(3{,}5)$.

Exercice 14 – Moments d'une loi de Poisson par transfert

Soit $X \sim P(\lambda)$ avec $\lambda > 0$.

a) Calculer $\mathbb{E}[X(X-1)]$ et en déduire $\mathrm{V}(X)$.

b) Calculer $\mathbb{E}\left(\dfrac{1}{X+1}\right)$.

c) Comparer $\mathbb{E}\left(\dfrac{1}{X+1}\right)$ et $\dfrac{1}{\mathbb{E}(X)+1}$ pour $\lambda = 2$.

Exercice 15 – Synthèse : jeu de pile ou face

On lance une pièce équilibrée n fois. Soit X le nombre de **changements** (un lancer différent du précédent).

a) Calculer $\mathbb{E}(X)$.

b) Calculer $\mathrm{V}(X)$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).