Plaquette 5 – Synthèse : modéliser avec l'espérance et la variance

Espérance et variance — Prépa MP / MPI (2e année)

Exercices

Méthode

Face à un problème concret, on **décompose** la quantité étudiée : en somme d'indicatrices, en somme de temps d'attente géométriques indépendants, ou par conditionnement sur la première étape. L'**espérance** se calcule par linéarité ; la **variance** exige les covariances (nulles si les morceaux sont indépendants). On termine par une inégalité de concentration pour **décider** : prime, stock, nombre de tirages.

Exercice 1 – Collectionneur de vignettes : variance et risque

Un album compte $n = 6$ vignettes différentes ; chaque achat donne une vignette uniforme, indépendamment. Soit T le nombre d'achats pour compléter l'album.

a) Écrire T comme somme de variables géométriques indépendantes et calculer $\mathbb{E}(T)$.

b) Calculer $\mathrm{V}(T)$.

c) Majorer $\mathbb{P}(T \geq 30)$ par Cantelli. La valeur exacte est $\approx 0{,}030$: commenter.

Exercice 2 – Ouvrir une porte avec un trousseau

Un gardien dispose de n clés dont une seule ouvre la porte. Soit X le nombre d'essais.

a) Il essaie les clés une à une **en écartant** celles qui ont échoué. Loi, espérance et variance de X.

b) Il est distrait et **remet** chaque clé dans le trousseau. Mêmes questions.

c) Application $n = 10$: comparer les écarts types.

Exercice 3 – Joueur de roulette et marche biaisée

Un joueur mise 1 € à chaque partie ; il gagne 1 € avec probabilité $p = 0{,}45$ et perd 1 € sinon, indépendamment. Soit S_n son gain algébrique après n parties.

a) Calculer $\mathbb{E}(S_n)$ et $\mathrm{V}(S_n)$.

b) Pour $n = 1\,000$, majorer la probabilité que le joueur soit gagnant ($S_n \geq 0$).

c) Montrer que cette probabilité tend vers 0 quand $n \to +\infty$.

Exercice 4 – Taille d'une population de branchement

Chaque individu a, indépendamment, 0, 1 ou 2 descendants avec probabilités 0,2 ; 0,4 ; 0,4. On part de $Z_0 = 1$ individu ; Z_n est la taille de la génération n.

a) Calculer l'espérance m et la variance s^2 du nombre de descendants d'un individu.

b) Montrer que $\mathbb{E}(Z_{n+1}) = m\,\mathbb{E}(Z_n)$ et $\mathrm{V}(Z_{n+1}) = m^2\mathrm{V}(Z_n) + s^2 m^n$.

c) En déduire $\mathbb{E}(Z_n)$, vérifier que $\mathrm{V}(Z_n) = s^2 m^{n-1}\dfrac{m^n - 1}{m - 1}$, et donner les valeurs pour $n = 10$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 5 – Attendre deux six de suite

On lance un dé équilibré jusqu'à obtenir deux 6 consécutifs. Soit e l'espérance du nombre de lancers (supposée finie) et f l'espérance du nombre de lancers **restants** quand le dernier lancer est un 6 (et qu'on n'a pas fini).

a) Établir deux équations reliant e et f.

b) Les résoudre.

c) Généraliser l'idée : on admet que pour r six consécutifs, l'espérance vaut $\frac{6^{r+1}-6}{5}$. Vérifier le cas $r=1$ et $r=2$.

Exercice 6 – Durée moyenne d'une partie de pile ou face

Un joueur possède k € et son adversaire $N-k$ € ; à chaque lancer d'une pièce équilibrée, l'un donne 1 € à l'autre. La partie s'arrête quand un joueur est ruiné. On note e_k la durée moyenne (supposée finie).

a) Justifier $e_0 = e_N = 0$ et $e_k = 1 + \frac{1}{2}(e_{k-1} + e_{k+1})$ pour $0 < k < N$.

b) Vérifier que $e_k = k(N-k)$ convient, et admettre l'unicité.

c) Application : $N = 10$, avec $k = 5$ puis $k = 1$.

Exercice 7 – Estimer une population par capture-recapture

Dans un lac de N poissons (inconnu), on en marque $m = 100$ puis on les relâche. Plus tard, on en pêche $n = 80$ sans remise ; X est le nombre de poissons marqués parmi eux.

a) Donner $\mathbb{E}(X)$ et en déduire un estimateur naturel $\hat{N}$ de N.

b) On observe $X = 16$. Estimer N.

c) Pour $N = 500$, calculer l'écart type de X.

d) Pourquoi l'estimateur $\frac{mn}{X}$ n'admet-il pas d'espérance ?

Exercice 8 – Coût du tri par insertion

Le tri par insertion effectue autant d'échanges que la permutation à trier a d'**inversions** (couples $i<j$ avec $\sigma(i)>\sigma(j)$). Pour σ uniforme sur S_n, on admet que le nombre d'inversions s'écrit $I = \sum_{j=1}^{n} U_j$, où U_j (nombre de $i<j$ tels que $\sigma(i)>\sigma(j)$) sont **indépendantes** et uniformes sur $\{0,\dots,j-1\}$.

a) Calculer $\mathbb{E}(I)$.

b) Calculer $\mathrm{V}(I)$.

c) Application $n = 10$; contrôler pour $n = 3$.

Exercice 9 – Prix d'une option dans un modèle binomial

Une action vaut $S_0 = 100$ €. Chaque jour, son cours est multiplié par 1,1 ou par 0,9 avec probabilité $\frac{1}{2}$, indépendamment. Soit S_3 son cours après 3 jours.

a) Donner la loi de S_3 et calculer $\mathbb{E}(S_3)$ et $\mathrm{V}(S_3)$.

b) Une option rapporte $(S_3 - 100)^+ = \max(S_3 - 100, 0)$. Calculer son espérance.

c) Pourquoi l'option a-t-elle une valeur positive alors que l'action ne « gagne » rien en moyenne ?

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 10 – Fixer une prime d'assurance

Un assureur couvre $n = 1\,000$ contrats indépendants ; chacun déclenche un sinistre de 10 000 € avec probabilité 0,01. Il encaisse une prime π par contrat et veut que la charge totale S dépasse ses recettes $n\pi$ avec probabilité au plus 5 %.

a) Calculer $\mathbb{E}(S)$ et $\mathrm{V}(S)$.

b) Déterminer une prime suffisante grâce à l'inégalité de Cantelli.

c) Le nombre de sinistres $K \sim B(1\,000; 0{,}01)$ vérifie $\mathbb{P}(K \leq 15) \approx 0{,}952$. Quelle prime suffit en réalité ?

Exercice 11 – Nombre de groupes de places occupées

Dans une rangée de n sièges, chaque siège est occupé indépendamment avec probabilité p ($q = 1 - p$). Un **groupe** est une suite maximale de sièges consécutifs occupés. Soit G le nombre de groupes.

a) Justifier que $G = \sum_{i=1}^{n} 1_{B_i}$, où B_i est l'événement « le siège i est occupé et le siège $i-1$ ne l'est pas (ou $i = 1$) ».

b) En déduire $\mathbb{E}(G)$.

c) Application : $n = 50$, $p = 0{,}6$. Quelle valeur de p maximise $\mathbb{E}(G)$ pour n grand ?

Exercice 12 – Hétérogénéité et variance

Soit $X = \sum_{i=1}^{n} B_i$ avec $B_i \sim B(p_i)$ indépendantes, et $\overline{p} = \frac{1}{n}\sum_i p_i$.

a) Calculer $\mathbb{E}(X)$ et $\mathrm{V}(X)$.

b) Montrer que $\mathrm{V}(X) \leq n\overline{p}(1-\overline{p})$, variance de la binomiale de même espérance.

c) Application : 20 patients, dont 10 guérissent avec probabilité 0,1 et 10 avec probabilité 0,5.

Exercice 13 – Arrêts d'un ascenseur

$k = 8$ personnes montent dans un ascenseur desservant $m = 10$ étages ; chacune choisit son étage uniformément et indépendamment. Soit A le nombre d'arrêts et $Y = m - A$ le nombre d'étages sans arrêt.

a) Calculer $\mathbb{E}(Y)$ puis $\mathbb{E}(A)$.

b) Calculer $\mathrm{V}(Y)$ et en déduire $\mathrm{V}(A)$.

Exercice 14 – Contrôle séquentiel d'une production

On inspecte des pièces une à une ; chacune est défectueuse avec probabilité $p = 0{,}02$, indépendamment. On s'arrête à la première pièce défectueuse, ou au plus tard après $N = 50$ pièces. Soit X le nombre de pièces inspectées.

a) Exprimer X à l'aide d'une variable $G \sim G(p)$ et calculer $\mathbb{P}(X > k)$.

b) En déduire $\mathbb{E}(X)$ par la formule de la queue.

c) Application numérique ; interpréter.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 15 – Synthèse : le paradoxe de l'attente du bus

Les intervalles entre deux bus successifs sont indépendants et valent 5 ou 15 minutes avec probabilité $\frac{1}{2}$ chacun. Un voyageur arrive à un instant « au hasard » de la journée.

a) Calculer l'intervalle moyen $\mathbb{E}(L)$ entre deux bus.

b) Sur une longue période, la proportion du temps couverte par des intervalles de longueur ℓ est $\frac{\ell\,\mathbb{P}(L=\ell)}{\mathbb{E}(L)}$. En déduire la loi de la longueur L^* de l'intervalle dans lequel arrive le voyageur, et $\mathbb{E}(L^*)$.

c) Le voyageur arrive uniformément dans son intervalle : calculer son attente moyenne et la comparer à $\frac{\mathbb{E}(L)}{2}$.

d) Montrer qu'en général $\mathbb{E}(L^*) = \mathbb{E}(L) + \frac{\mathrm{V}(L)}{\mathbb{E}(L)}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).