Plaquette 3 – Variance, covariance et corrélation : calculs et structure

Espérance et variance — Prépa MP / MPI (2e année)

Exercices

Méthode

On calcule une variance par **König-Huygens** ou par la **variance d'une somme** (variances plus deux fois les covariances). La covariance est une **forme bilinéaire symétrique positive** : on la développe comme un produit scalaire, et **Cauchy-Schwarz** borne la corrélation. Pour une quantité définie en deux temps (nombre aléatoire de termes, paramètre tiré au hasard), on **conditionne** : variance totale.

Exercice 1 – Variance d'une loi uniforme discrète

Soit X uniforme sur $\{1, \dots, n\}$.

a) Calculer $\mathbb{E}(X)$ et $\mathrm{V}(X)$.

b) En déduire la variance d'une variable uniforme sur $\{a, a+h, \dots, a+(n-1)h\}$.

c) Application : un générateur tire un multiple de 5 uniforme entre 10 et 100 inclus. Donner son écart type.

Exercice 2 – Covariance nulle sans indépendance

Soit X uniforme sur $\{-2, -1, 1, 2\}$ et $Y = X^2$.

a) Calculer $\mathrm{Cov}(X, Y)$.

b) X et Y sont-elles indépendantes ?

c) Montrer en revanche que pour deux variables de Bernoulli, covariance nulle et indépendance sont équivalentes.

Exercice 3 – Covariances de la loi multinomiale

On lance n fois un dé équilibré ; N_k est le nombre de faces k obtenues.

a) Calculer $\mathrm{Cov}(N_1, N_6)$ en écrivant N_1 et N_6 comme sommes d'indicatrices.

b) En déduire $\rho(N_1, N_6)$.

c) Expliquer pourquoi la matrice de covariance de $(N_1, \dots, N_6)$ est singulière.

Exercice 4 – Meilleure approximation affine

Soient X, Y admettant un moment d'ordre 2, avec $\mathrm{V}(X) > 0$. On cherche (a, b) minimisant $\varphi(a, b) = \mathbb{E}\left[(Y - aX - b)^2\right]$.

a) À a fixé, déterminer le b optimal.

b) En déduire a optimal et la valeur du minimum en fonction de $\rho = \rho(X, Y)$.

c) Application : $X = D_1$ premier dé, $Y = D_1 + D_2$ somme de deux dés indépendants.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 5 – Corrélation du maximum et du minimum de deux dés

On lance deux dés équilibrés indépendants ; M est le maximum et m le minimum. On rappelle $\mathbb{E}(M) = \frac{161}{36}$ et $\mathbb{E}(m) = \frac{91}{36}$.

a) Calculer $\mathbb{E}(Mm)$ sans déterminer la loi du couple.

b) Calculer $\mathrm{V}(M)$ puis justifier que $\mathrm{V}(m) = \mathrm{V}(M)$.

c) En déduire $\mathrm{Cov}(M, m)$ et $\rho(M, m)$.

Exercice 6 – Variance du nombre de descentes

Soit σ uniforme sur S_n ($n \geq 3$) et $D = \sum_{i=1}^{n-1} 1_{A_i}$ son nombre de descentes, avec $A_i = \{\sigma(i) > \sigma(i+1)\}$ et $\mathbb{P}(A_i) = \frac{1}{2}$.

a) Calculer $\mathrm{Cov}(1_{A_i}, 1_{A_{i+1}})$.

b) Justifier que $\mathrm{Cov}(1_{A_i}, 1_{A_j}) = 0$ si $|i-j| \geq 2$.

c) En déduire $\mathrm{V}(D)$ et le contrôler pour $n = 3$.

Exercice 7 – Variance du nombre de cycles

On admet que le nombre C_n de cycles d'une permutation uniforme de S_n a même loi que $B_1 + \cdots + B_n$, où les B_k sont **indépendantes** et $B_k \sim B\left(\frac{1}{k}\right)$.

a) Retrouver $\mathbb{E}(C_n)$ et calculer $\mathrm{V}(C_n)$.

b) Contrôler pour $n = 4$ (6, 11, 6, 1 permutations ont 1, 2, 3, 4 cycles).

c) Donner un équivalent de $\mathrm{V}(C_n)$.

Exercice 8 – Portefeuille à variance minimale

Deux actifs ont des rendements X et Y d'écarts types $\sigma_X = 0{,}2$ et $\sigma_Y = 0{,}3$, de corrélation $\rho = -0{,}5$. On investit la proportion $t \in [0, 1]$ dans X et $1 - t$ dans Y.

a) Exprimer la variance $v(t)$ du rendement $R_t = tX + (1-t)Y$.

b) Déterminer t^* minimisant v et l'écart type minimal.

c) Comparer avec les deux actifs pris seuls.

Exercice 9 – Somme d'un nombre aléatoire de termes

Un assureur reçoit $N \sim P(\lambda)$ déclarations de sinistres par an ; les montants $X_1, X_2, \ldots$ sont indépendants, de même loi, d'espérance μ et de variance s^2, et indépendants de N. La charge annuelle est $S = \sum_{i=1}^{N} X_i$.

a) Calculer $\mathbb{E}(S \mid N = n)$ et $\mathrm{V}(S \mid N = n)$.

b) En déduire $\mathbb{E}(S)$ et $\mathrm{V}(S)$ (formule de Wald).

c) Application : $\lambda = 50$, $\mu = 2\,000$ €, $s = 1\,500$ €.

Exercice 10 – Variance totale : un dé puis des pièces

On lance un dé équilibré ; s'il donne N, on lance N pièces équilibrées et on note X le nombre de piles.

a) Calculer $\mathbb{E}(X)$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

b) Calculer $\mathrm{V}(X)$ par la formule de la variance totale.

c) Comparer avec la variance d'une binomiale de même espérance et de paramètre $n = 6$.

Exercice 11 – Variance d'un produit de variables indépendantes

Soient X, Y indépendantes admettant un moment d'ordre 2.

a) Montrer que $\mathrm{V}(XY) = \mathrm{V}(X)\mathrm{V}(Y) + \mathrm{V}(X)\mathbb{E}(Y)^2 + \mathrm{V}(Y)\mathbb{E}(X)^2$.

b) Application : produit de deux dés équilibrés ; contrôler par un calcul direct.

Exercice 12 – Variables échangeables : une covariance bornée

Soient $X_1, \dots, X_n$ ($n \geq 2$) de même variance $\sigma^2 > 0$ et de covariances deux à deux égales à c.

a) Exprimer $\mathrm{V}(X_1 + \cdots + X_n)$ et en déduire $c \geq -\dfrac{\sigma^2}{n-1}$.

b) Montrer que le cas d'égalité a lieu pour les indicatrices A_i « la i-ième boule tirée est rouge » quand on vide entièrement, sans remise, une urne de n boules dont m rouges ($0 < m < n$).

Exercice 13 – Corrélation égale à 1

Soient X, Y avec $\mathbb{E}(X) = 1$, $\mathbb{E}(Y) = 5$, $\mathrm{V}(X) = 4$, $\mathrm{V}(Y) = 9$ et $\mathrm{Cov}(X, Y) = 6$.

a) Calculer $\rho(X, Y)$.

b) Calculer $\mathrm{V}\left(Y - \frac{3}{2}X\right)$ et conclure.

c) Peut-on avoir $\mathrm{Cov}(X, Y) = 7$ avec les mêmes variances ?

Exercice 14 – Covariance et indépendance de fonctions

Soient X, Y deux variables discrètes.

a) Montrer que si X et Y sont indépendantes, alors $\mathrm{Cov}(f(X), g(Y)) = 0$ pour toutes fonctions bornées f, g.

b) Réciproquement, montrer que si cette covariance est nulle pour toutes f, g bornées, alors X et Y sont indépendantes.

c) Application : X uniforme sur $\{-1, 0, 1\}$ et $Y = |X|$. Trouver f et g simples montrant la dépendance.

Exercice 15 – Synthèse : estimer la variance sans biais

Soient $X_1, \dots, X_n$ ($n \geq 2$) indépendantes de même loi, d'espérance μ et de variance σ^2. On note $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_i X_i$.

a) Calculer $\mathbb{E}\left(X_i^2\right)$ et $\mathbb{E}\left(\overline{X}^2\right)$.

b) Montrer que $\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^2 = \sum_i X_i^2 - n\overline{X}^2$.

c) En déduire $\mathbb{E}\left[\sum_i \left(X_i - \overline{X}\right)^2\right]$ et un estimateur sans biais S^2 de σ^2.

d) Contrôle : $n = 2$ lancers d'un dé.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).